

## CH7: Filtrage.

### 1. Introduction sur les complexes:

Cette partie a déjà été traitée par ailleurs et est indispensable pour aborder cette étude.

### 2. Quadripôles:

**2.1 Présentation:** Un quadripôle est un dispositif à quatre bornes.

$v_e$  est la tension instantanée d'entrée;  $v_s$  est la tension instantanée de sortie;  $i_e$  est l'intensité instantanée d'entrée;  $i_s$  est l'intensité instantanée de sortie. Les courants sont orientés dans le sens rentrant.

Le dipôle de commande peut être représenté par son modèle de Thévenin équivalent et le dipôle récepteur étant souvent représenté par une impédance, en régime sinusoïdal, on a la représentation ci-contre.

*Remarque:*

Les quadripôles sont souvent des tripôles, car les deux bornes B et D sont reliées entre elles. Cette liaison sera prise comme référence des potentiels.

### 2.2 Modèle représentatif d'un quadripôle :

$Z_e$  est l'impédance d'entrée.

$Z_e$  peut dépendre de  $Z_u$  si le quadripôle est branché sur une impédance d'utilisation.

$Z_s$  est l'impédance de sortie définie lorsque  $E_g = 0$ .

$V_{so}$  est la tension de sortie définie en l'absence de charge  $Z_u$ .

On a donc  $V_{so} = A_o \cdot V_e$ .

### 2.3 Exemple: quadripôle R-C :

a) détermination de  $Z_e$  :

En l'absence de  $Z_u$ ,  $I_s = 0$ .

$$Z_e = \frac{V_e}{I_e} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

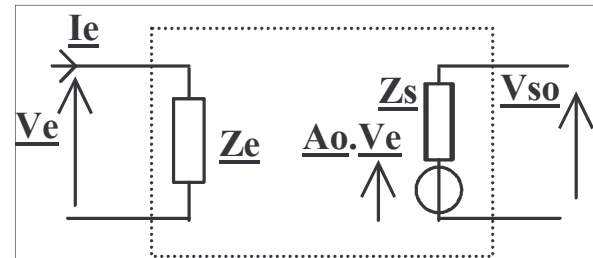
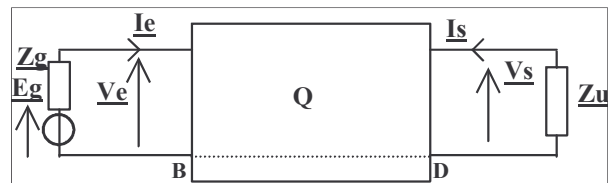
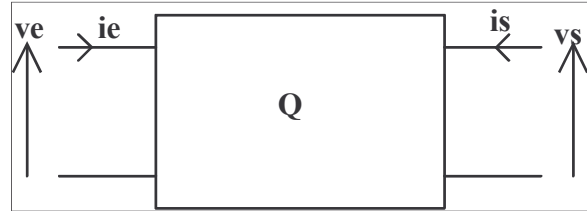
b)

détermination de  $Z_s$  et  $V_{so}$  :

$Z_s$  est déterminée pour  $E_g = 0$  (source de tension court-circuitée).

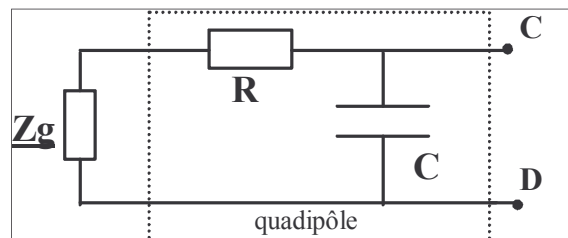
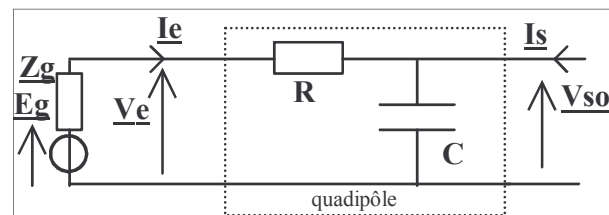
$$Z_s = \frac{(Z_g + R) \cdot \frac{1}{jC\omega}}{(Z_g + R) + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{Z_g + R}{1 + jRC\omega}$$

$Z_s$  vue des points C et D est égale à :



$$Z_s = \frac{V_e}{I_e}$$

$A_o = \frac{V_{so}}{V_e}$  est l'amplification en tension à vide.



$$A_o = \frac{V_{so}}{V_e} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

## 2.4 Fonction de transfert d'un quadripôle :

### 2.4.1 Définition :

En régime sinusoïdal, la *fonction de transfert d'un quadripôle* est définie par :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_{so}}{\underline{V}_e}$$

### 2.4.2 Diagramme de Bode d'une fonction de transfert :

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert est constitué par **deux courbes**, tracées en fonction de la fréquence  $f$  en échelle logarithmique:

1° **courbe** (courbe de gain):  $G(f)$ , avec  
 $G$  est le gain du quadripôle, exprimé en décibels (dB).

$$G = 20 \cdot \log(|\underline{T}|)$$

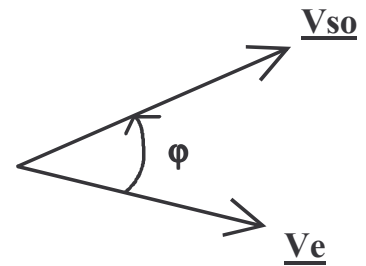
2° **courbe** (courbe de phase) :  $\varphi(f)$ , avec  $\varphi = \arg(\underline{T})$ , argument de la fonction de transfert, exprimé en degré ou en radians.

*Remarque* : compte tenu de la définition de  $\underline{T}$ ,  $\varphi$  est la différence de phase entre  $\underline{V}_{so}$  et  $\underline{V}_e$ .

$\varphi$  est donc le déphasage de  $\underline{V}_e$  sur  $\underline{V}_{so}$ .

Dans certains cas, le diagramme de Bode peut être représenté en fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi f$ , ou d'une variable réduite  $x=f/f_0$  où  $f_0$  est définie à partir des éléments du circuit.

D'autre part, il arrive qu'on simplifie l'étude en représentant le diagramme par ses asymptotes: on obtient alors le *diagramme asymptotique de Bode*.



### 2.4.3 Bande passante :

On appelle bande passante à - 3dB du quadripôle, l'intervalle de fréquence pour lequel on a:

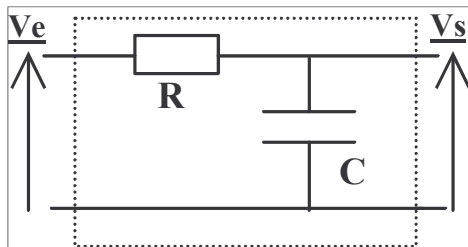
$$G_{\max} - 3\text{dB} \leq G \leq G_{\max}$$

Les fréquences pour lesquelles  $G = G_{\max} - 3\text{dB}$  sont les *fréquences de coupure* à -3dB du quadripôle.

*Remarque*: si  $G = G_{\max} - 3\text{dB}$ , alors,  $T = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$

## 3. Etude de quelques filtres passifs :

### 3.1 Quadripôle R-C (filtre passe-bas du 1° ordre) :



$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j2\pi RC \cdot f}$$

Si

on définit  $f_c = 1/2\pi RC$ , on obtient:

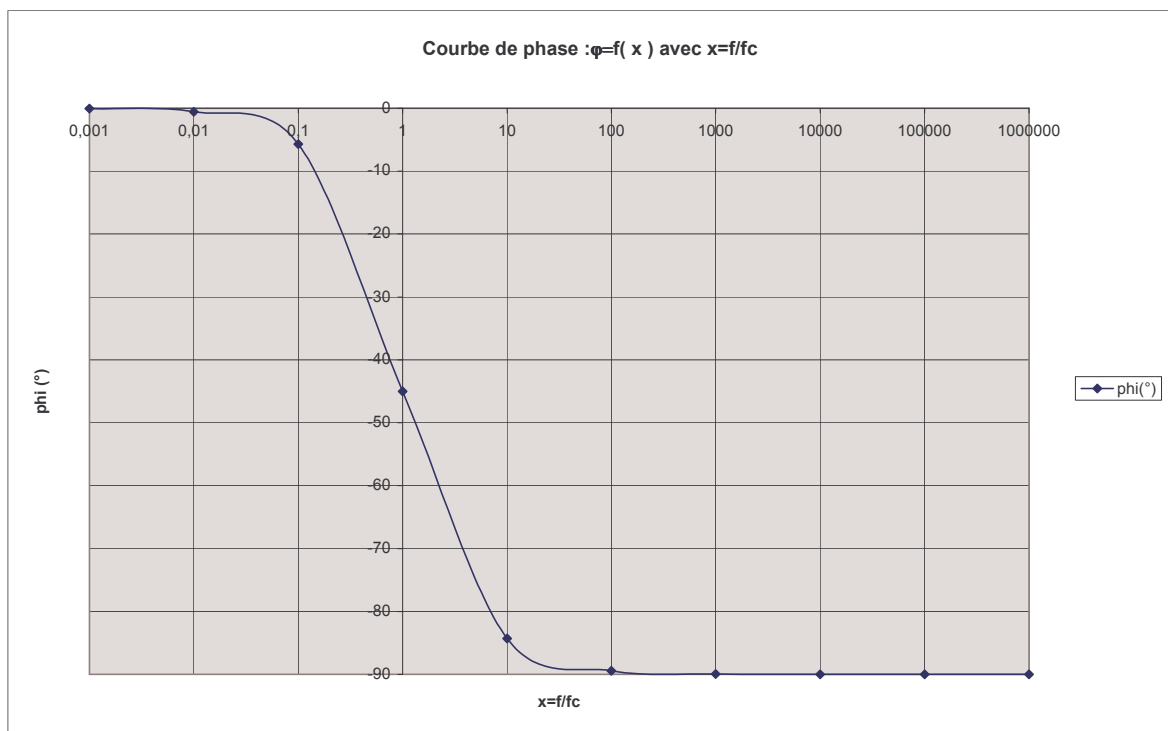
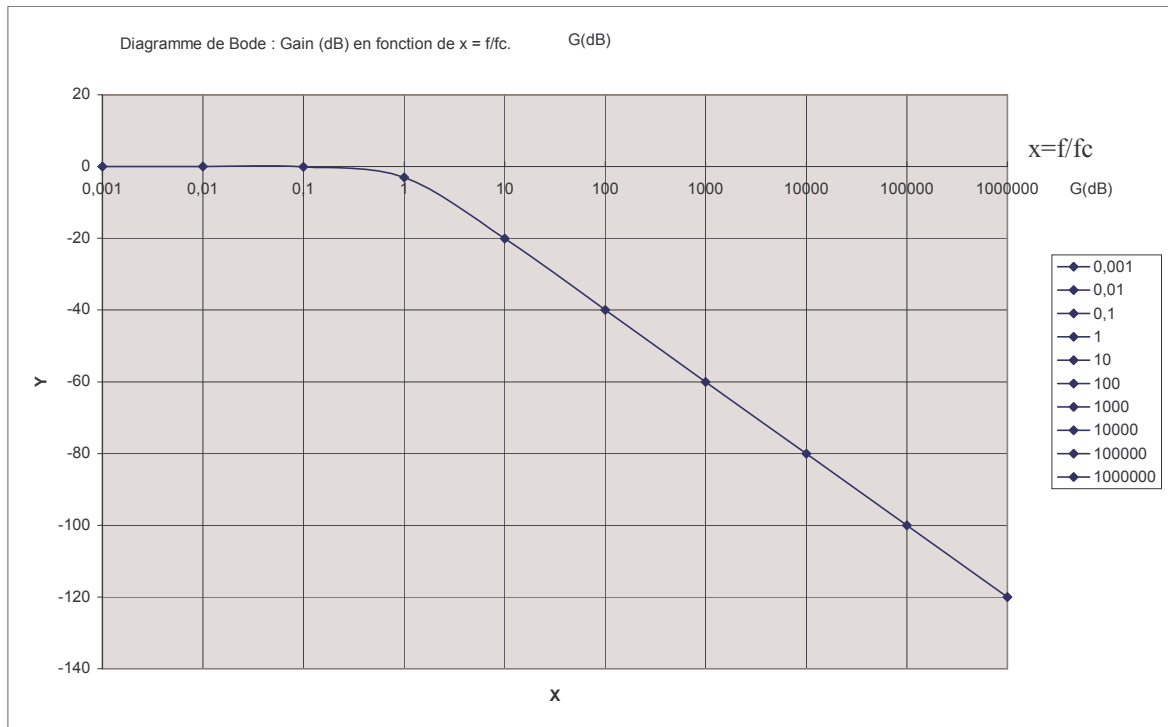
$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

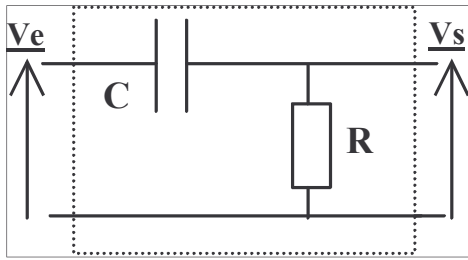
et

$$\tan \varphi = - \frac{f}{f_c}$$

Le diagramme de Bode est donné page suivante.



### 3.2 Quadripôle C-R : filtre passe-haut du premier ordre.



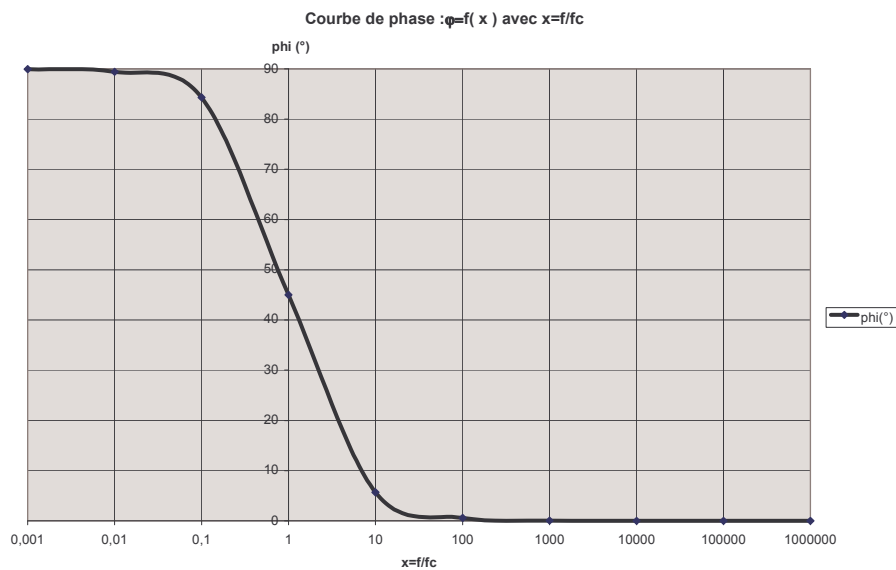
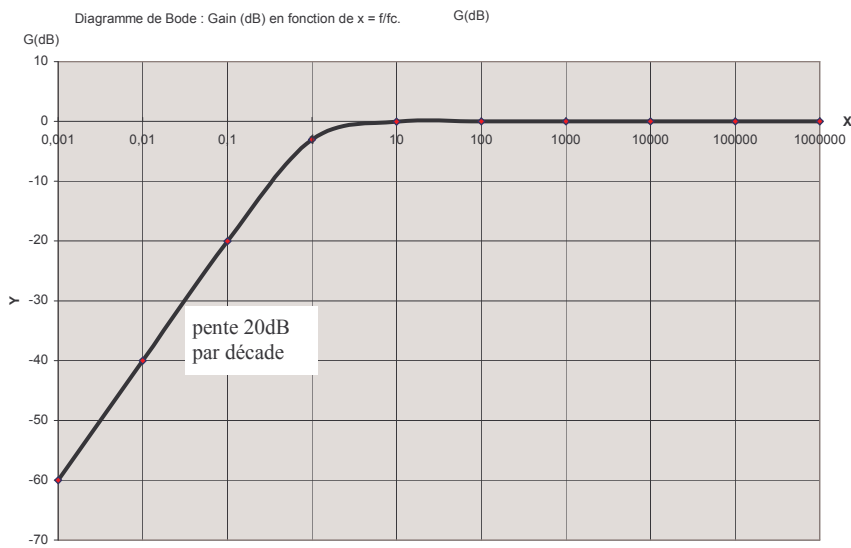
La fonction de transfert de ce quadripôle est :

$$\underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

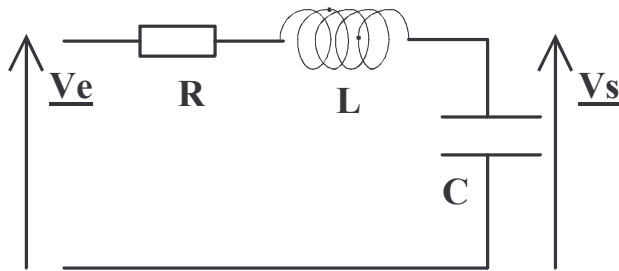
Si on appelle  $\omega_c$  la quantité  $\omega_c = 1/RC$ , il vient:

$$\underline{T} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{en posant } x = \frac{\omega}{\omega_c} = f/f_c .$$

Le diagramme de Bode de ce quadripôle se présente ainsi:



3.3 Filtre passe-bas du 2°ordre :



La fonction de transfert se présente ainsi:

$$\underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On pose :

$$\omega\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et :

$$RC = 2 \frac{z}{\omega\omega}$$

soit:

$$z = \frac{RC\omega\omega}{2} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

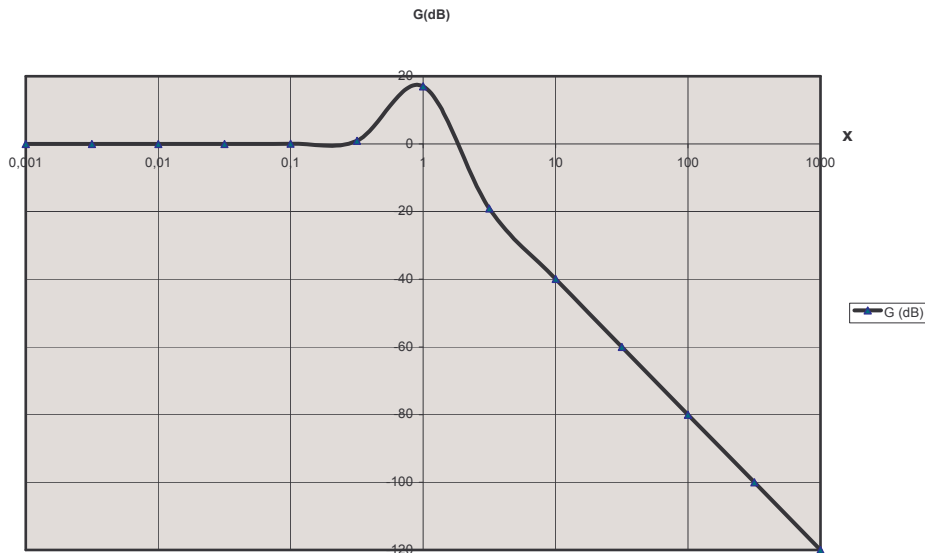
La fonction de transfert se présente alors sous la forme:

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j \frac{2z}{\omega\omega} \omega - \frac{\omega^2}{\omega\omega^2}}$$

$z$  est appelé coefficient d'amortissement.

$\omega\omega$  est la pulsation de résonance pour  $z=0$ .

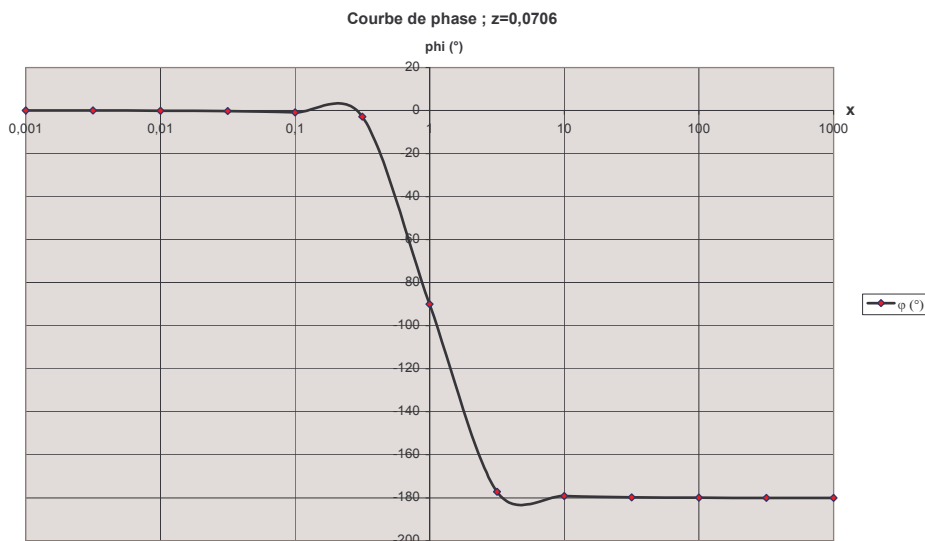
Il est à noter que pour  $z < 0,7$ , les caractéristiques  $T(\omega)$  passent par un maximum. Le gain et la phase sont représentés ici pour  $z=0,0706$ .



Filtre passe bas du 2°ordre ;  $z=0,0706$

La variable  $x$

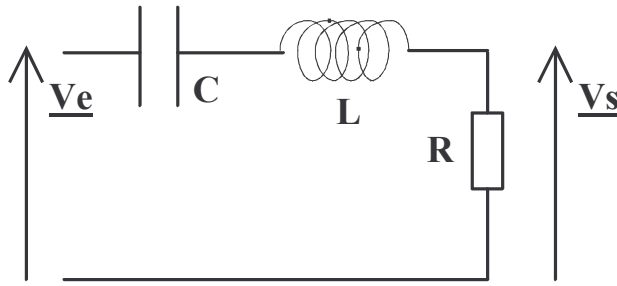
est:  $x = \omega/\omega\omega$ .



Courbe de phase ;  $z=0,0706$

### 3.4 Filtre passe-bande passif :

Le montage est le suivant :



La fonction de transfert se présente ainsi:

$$\underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Soit en reprenant les notations précédentes:

$$\underline{T} = \frac{j \frac{2z}{\omega\omega_0} \omega}{1 + j \frac{2z}{\omega\omega_0} \omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j2z \frac{\omega}{\omega_0}} + \frac{j\omega}{2z\omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{2z} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Rappel:

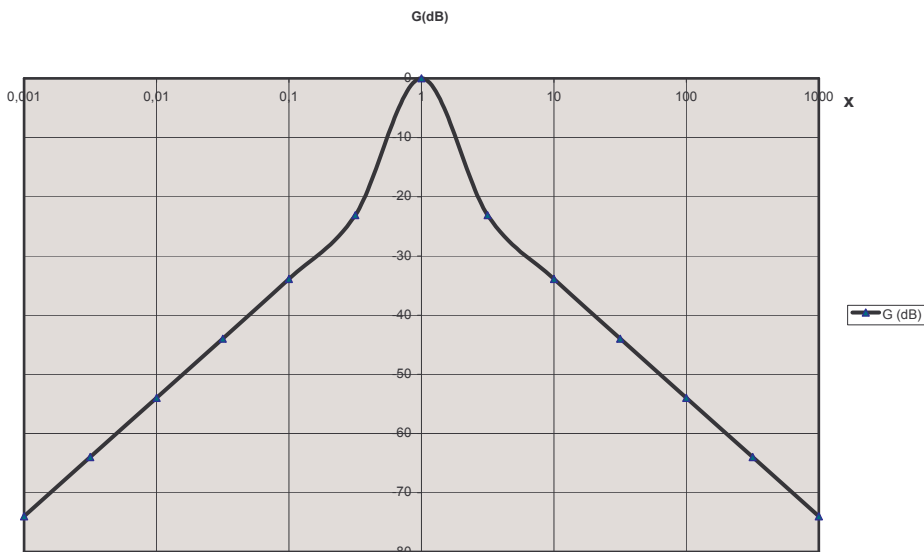
$$RC = 2 \frac{z}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

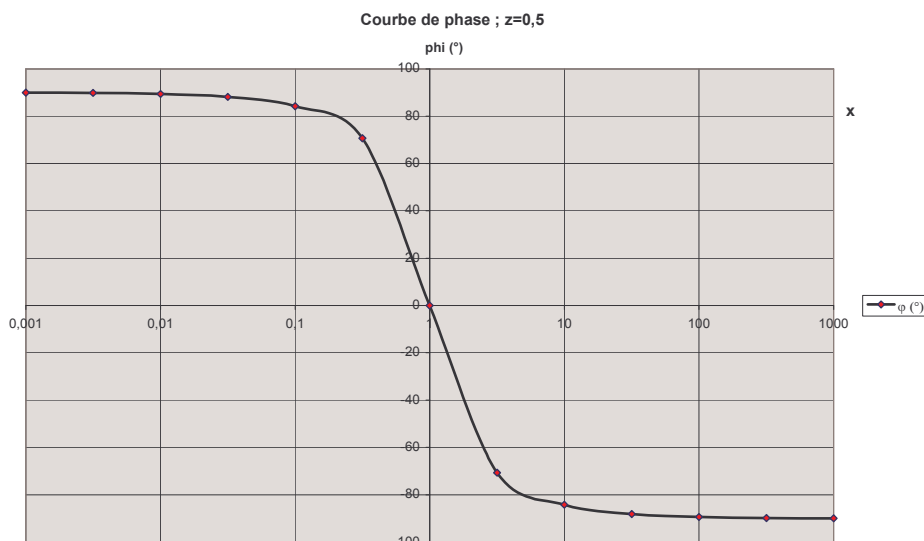
$$z = \frac{RC\omega_0}{2} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + \frac{j}{2z} \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

La représentation du gain correspondant est donnée ci-dessous. En utilisant comme variable réduite  $x = \omega / \omega_0$ .



Filtre passe bande ; z=0,1



Courbe de phase ; z=0,5