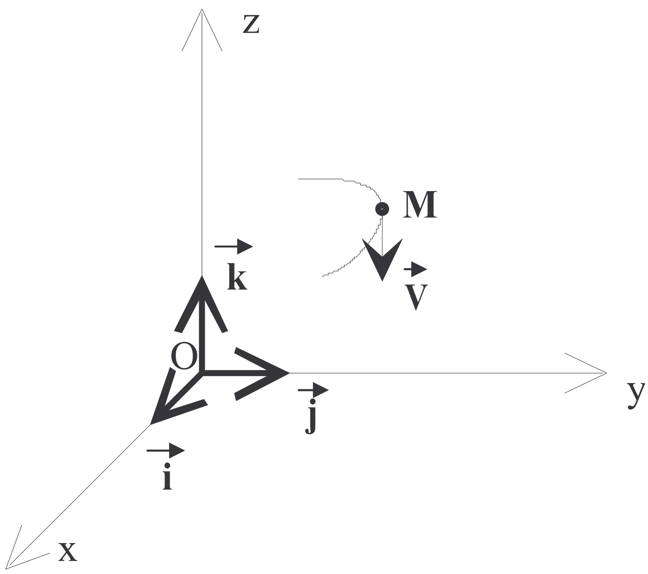
BTS CIM 2. Cours de Physique appliquée:(programme: Module 7)
CH 18 : Le solide en mouvement .

1. Les systèmes mécaniques en mouvements :

1.1 Référentiel :

Pour décrire le mouvement d'un point matériel ou d'un solide, il faut choisir un **référentiel**. Un référentiel est caractérisé par un système d'axes ou **repère** ayant pour origine un point O :

(O, Ox, Oy, Oz)



Un point M a pour coordonnées les trois grandeurs x,y,z , appelées coordonnées.

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}}$$

1.2 Trajectoire : La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions qu'il occupe au cours du temps. Sur cette trajectoire on peut définir l'abscisse curviligne notée s (t).

Il existe des mouvements particuliers :

Mouvement rectiligne si la trajectoire est une droite.

Mouvement circulaire lorsque la trajectoire est un cercle.

1.3 Vitesse et accélération :

La vitesse d'un point M sur sa trajectoire est la dérivée par rapport au temps du vecteur :

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Unités :
Vitesse : en $m.s^{-1}$

L'expression analytique du vecteur vitesse est :

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}}$$

Le vecteur vitesse a pour propriété d'être tangent à la trajectoire .
Son module V est aussi égal à la dérivée de l'abscisse curviligne : V = ds/dt .

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, la relation entre la vitesse V , le rayon R de la trajectoire et la vitesse angulaire Ω est :

$$\boxed{\Omega = \frac{V}{R}}$$

Unités : Ω : $rad.s^{-1}$; V : $m.s^{-1}$; R : m .

L'accélération est la dérivée de la vitesse:

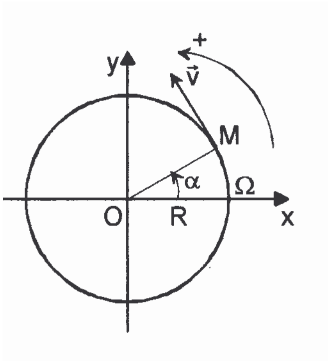
$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Unités : a : m.s^{-2} ; V : m.s^{-1} ; t : s .

Dans le cas d'un mouvement rectiligne :

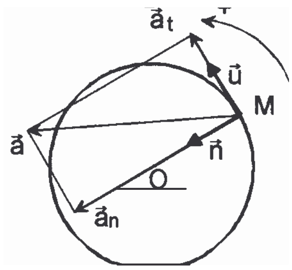
$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dans le cas 'un mouvement circulaire : L'accélération se décompose en deux composantes :



La composante $\vec{a_t}$ ou composante tangentielle

La composante $\vec{a_n}$ ou composante normale à la trajectoire.



On montre que l'accélération tangentielle $\vec{a_t}$ pour module :

$$a_t = R.\frac{d\Omega}{dt}$$

On montre que l'accélération normale $\vec{a_n}$ pour module :

$$a_n = \frac{V^2}{R} = R.\Omega^2$$

L'accélération angulaire est définie par :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dt}$$

1.4 <u>Centre et moment d'inertie d'un système</u> :

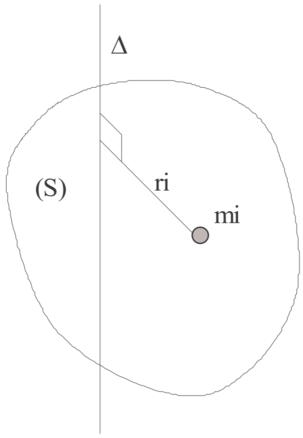
Le <u>centre d'inertie ou centre de masse</u> d'un solide est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{OM}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{OM}}{m}$$

On l'appelle aussi le <u>centre de gravité</u>.

Le moment d'inertie J d'un solide par rapport à un axe Δ est défini par :

$$\boxed{J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i . r_i^{\,2}}$$



2. Relation fondamentale de la dynamique :

Cette relation est aussi connue sous le nom de seconde loi de Newton.
Dan un repère galiléen, un point matériel de masse m , soumis à des actions mécaniques modélisables par une force $\vec{F}$, subit une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$\boxed{\vec{F} = m.\vec{a}}$$

unités : F en newton (N)
m en kg
a en m.s^{-2}

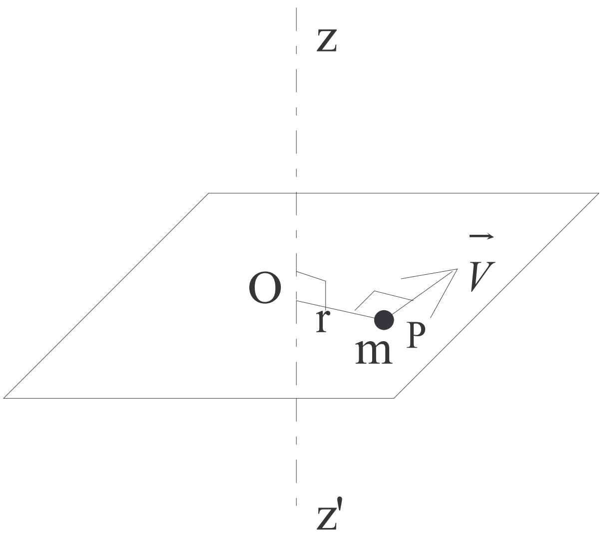
Théorème du centre d'inertie :
Dan un repère galiléen, un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , soumis à des actions mécaniques modélisables par des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$, subit un mouvement tel que :

$$\boxed{\sum_{(S)} \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}_G}$$

3. Quantité de mouvement et moment cinétique :

3.1 Point matériel :

La quantité de mouvement d'un point matériel P de masse m et de vitesse $\vec{V}$ est égale à :



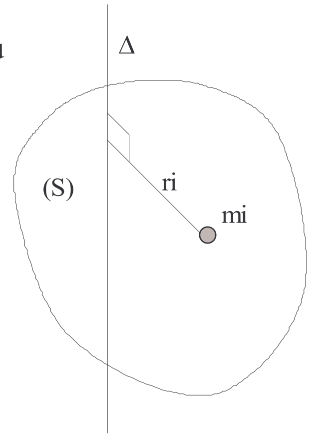
$$\boxed{\vec{p} = m.\vec{V}}$$

Lorsque le vecteur vitesse $\vec{V}$ est orthogonal à un axe z'z, et si r est la distance de ce point P à l'axe, le moment cinétique du point P par rapport à l'axe z'z est égal au moment par rapport à l'axe z'z du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$.

$$\boxed{L_z = r.p = r.m.V}$$

3.2 Moment cinétique d'un solide par rapport à l'axe de rotation :

Considérons un solide (S) mobile autour d'un axe de rotation Δ , avec une vitesse angulaire Ω . On peut définir le moment cinétique du solide comme étant la somme des moments cinétiques de tous les points matériels élémentaires qui le composent :



$$\boxed{L_{\Delta} = \sum_i r_i . m_i . V_i}$$

unités :
r : mètres .V : $m.s^{-1}$
m : kg L :$kg.m^2.s^{-1}$

Mais pour tous les points du solide, on a :

$$\boxed{V_i = \Omega . r_i}$$

unités : V : $m.s^{-1}$
Ω : rad/s
r : mètres .

Donc :

$$\boxed{L_{\Delta} = \sum_i r_i . m_i . \Omega . r_i = \Omega . \sum_i m_i . r_i^{\,2} = J_{\Delta} . \Omega}$$

Finalement :

$$\boxed{L_{\Delta} = J_{\Delta} . \Omega}$$

unités :
L :$kg.m^2.s^{-1}$
J : $kg.m^2$
Ω : rad/s

Le moment cinétique L_{Δ} d'un solide (S) est égal au produit de son moment d'inertie J_{Δ} par la vitesse de rotation Ω .

3.3 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE :

Enoncé :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ est égale à la somme des moments par rapport à Δ de toutes les forces extérieures.

Ce théorème se traduit par la relation :

$$\boxed{\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J_{\Delta} . \frac{d\Omega}{dt} = J_{\Delta} . \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum_i T_i}$$

unités :
dΩ/dt : $rad.s^{-2}$ dL/dt : $kg.m^2.s^{-2}$
L :$kg.m^2.s^{-1}$
J : $kg.m^2$
T : N.m .

4. ASPECTS ÉNERGÉTIQUES :

4.1 Energie cinétique :

On rappelle les expressions de l'énergie cinétique :

Pour un **solide en translation** :

$$Ec = \frac{1}{2} M . V^2$$

unités :
M :kg
V : $m.s^{-1}$
Ec : joules (J)

Pour un **solide en rotation :**

$$Ec = \frac{1}{2} J_{\Delta} . \Omega^2$$

unités :
J :kg.m²
Ω : $rad.s^{-1}$
Ec : joules (J)

4.2 Théorème de l'énergie cinétique :

Enoncé :

Dans un repère galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants t1 et t2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées au solide entre ces deux instants .

Cet énoncé se traduit par la relation suivante :

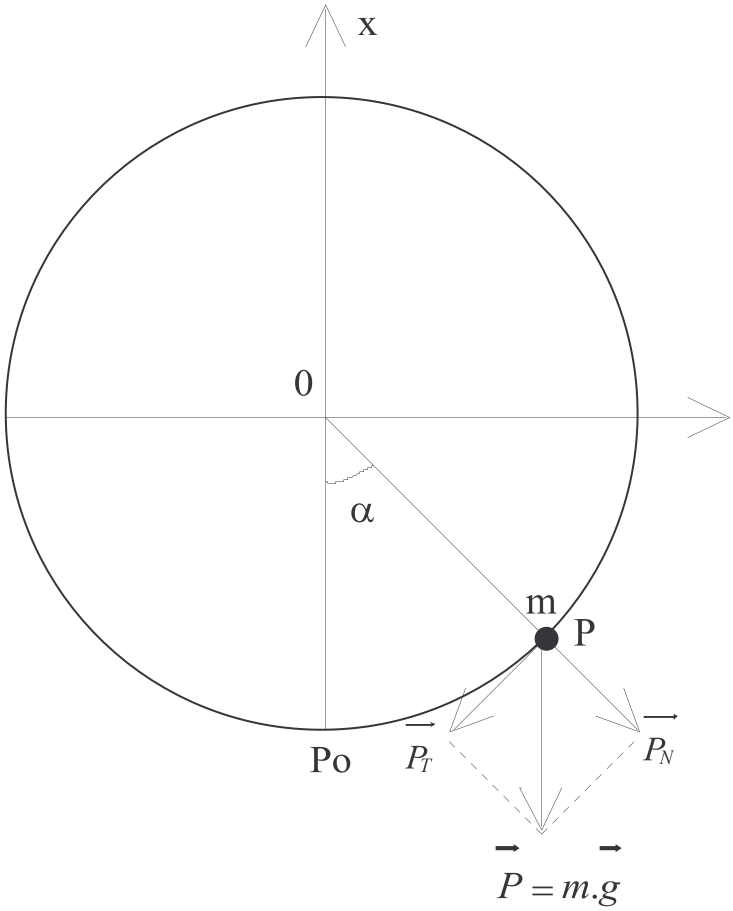
$$Ec_2 - Ec_1 = \sum W_{t1 \to t2}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

unités :
Ec : joules (J)
W : joules (J).

5. Systèmes mécaniques oscillants :

5.1 Pendule simple :

Définition : Un pendule simple est constitué par un point matériel pesant P, mobile sans frottement sur une circonférence dont le plan est vertical.



On décompose le poids $\vec{P}$ en deux composantes :

$\vec{P_T}$, tangente à la trajectoire,

$\vec{P_N}$, normale à la trajectoire.

On suppose que OP est une tige rigide sans masse.
Seule la composante tangentielle intervient dans l'expression de l'équation différentielle qui régit les variations de l'angle **α** .

On a : $P_T = \left|\vec{P_T}\right| = m.g.\sin\alpha = m.a_T$

Si α est orienté dans le sens trigonométrique, on a : $a_T = -l.\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$

Cela donne :

$$m.g.\sin\alpha = -m.l.\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}.\sin\alpha = 0} \quad (1)$$

Lorsque les oscillations sont petites, cette équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}.\alpha = 0} \quad (2)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du 2° ordre à coefficients constants et sans second membre.

Si on pose : $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}}$

Cette équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2.\alpha = 0} \quad (3)$$

Cette équation a une solution de la forme :

$$\alpha = \alpha_{max}.\ \mathrm{Sin}\ (\omega_0.t+\varphi) \quad (4)$$

α_{max}. et φ dépendent des conditions initiales, c'est-à-dire des valeurs de α et de $d\alpha/dt$ à l'instant **t = 0**.

α est donc une fonction sinusoïdale du temps, pour les petites oscillations .

La période T de ces petites oscillations est égale à :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad (5)$$

unités : T_0 en secondes (s) ; **l** en mètres, **g** en m.s^{-2} .

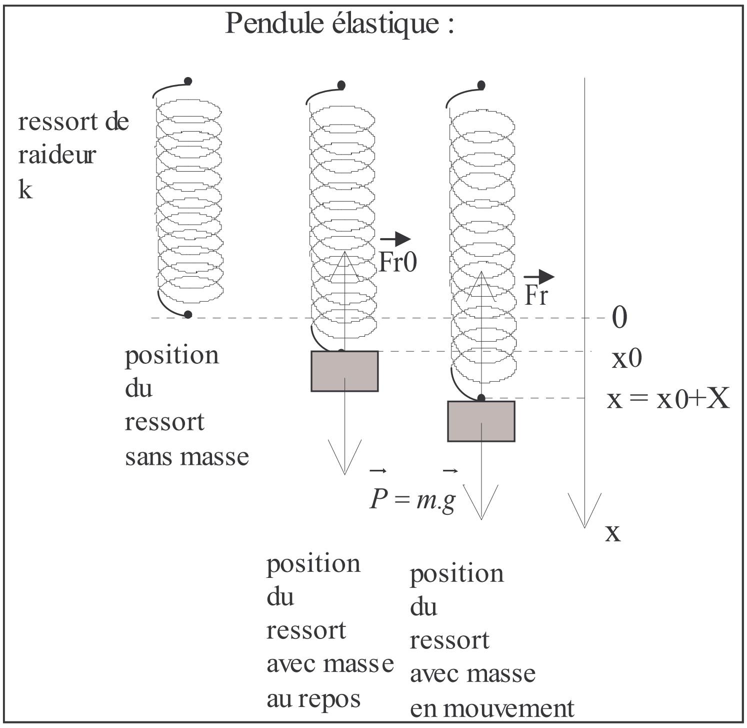
Dans le cas d'oscillations d'amplitude plus importante (supérieure à 8°), la période des oscillations est donnée avec une bonne approximation par la formule :

$$\boxed{T = T_0.\left(1 + \frac{\alpha_{max}^{2}}{16}\right)} \quad (6)$$

unités : **T** et T_0 en secondes (s) ; α_{max} en radians.

5.2 Pendule élastique :

a) Equations du mouvement :



à l'équilibre :
Le ressort a une élongation x0 .
On a :

$$\overrightarrow{F_{R0}} + \vec{P} = 0$$

Soit :
- k.x0 + m.g = 0
Donc : k.x0 = m.g

$$\boxed{x0 = \frac{m.g}{k}}$$

x0 est une constante.
Si on applique au ressort une élongation supplémentaire X, on a :

$$\overrightarrow{F_R} + \vec{P} = m.\vec{a}$$

Soit :

$$-kx + mg = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-k.(x0+X)+mg=m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{m.\frac{d^2X}{dt^2}+k.X=0} \quad (7)$$

Si on pose

$$\boxed{\omega_0^2=\frac{k}{m}} \quad (8)$$

unités : ω_0 en rad.s^{-1} ; m en kg ; k e N.m^{-1} .

Cela donne :

$$\boxed{\frac{d^2X}{dt^2}+\omega_0^2.X=0} \quad (9)$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
La période des oscillations sera :

$$\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (10)$$

unités : T_0 en secondes (s) ; m en kg ; k en N.m^{-1} .

L'élongation **X** atour de la position d'équilibre du ressort est une fonction sinusoïdale de la forme :
$X = A . Cos(\omega_0.t+\varphi)$
A et **φ** dépendent des conditions initiales.
Ex : si pour t = 0 , **X = a** et **dX/dt = 0** ,
a = A Cos φ

$$\frac{dX}{dt}=-A.\omega_0.Sin(\omega_0.t+\varphi)$$

0 = -A.ω_0.Sin (φ)
Une solution possible est donc : **φ = 0 et A = a** .
Ce qui donne :
$X = a . Cos(\omega_0.t)$
Avec x = x0 + X .

b) <u>Aspect énergétique</u> :

L'énergie potentielle Ep du système se décompose en deux : (voir cours de BTS1)
L'énergie potentielle élastique Ep_1, emmagasinée dans le ressort, et l'énergie potentielle de pesanteur Ep_2, due à l'attraction terrestre.

$$Ep_1=\frac{1}{2}k.x^2=\frac{1}{2}k.(x0+X)^2$$

$$Ep_2=-m.g.(x0+X)$$

L'énergie cinétique Ec est de la forme :

$$Ec=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Si X est de la forme X = a . Cos (ω_0.t),
cela donne :
dx/dt = dX/dt = - a . ω_0 . Sin (ω_0.t)

$$Ep_1 = \frac{1}{2}k.(x0 + a.Cos(\omega_0 t))^2$$

$$Ep_2 = -m.g.(x0 + a.Cos(\omega_0 t))$$

$$Ec = \frac{1}{2}m.a^2.\omega_0{}^2.Sin^2(\omega_0.t)$$

Développons ces expressions :

$$Ep_1 = \frac{1}{2}k.(x_0{}^2 + 2.x_0 a.Cos\omega_0 t + a^2.Cos^2\omega_0 t)$$

$$Ep_2 = -m.g.x0 - m.g.a.Cos\,\omega_0 t$$

$$Ec = \frac{1}{2}k.a^2.Sin^2\omega_0.t$$

L'énergie mécanique totale est la somme de ces expressions:

Em = Ep_1+Ep_2+Ec

Les deux termes en Cos ω_0t s'éliminent car : m.g = k.x_0 . Il reste :

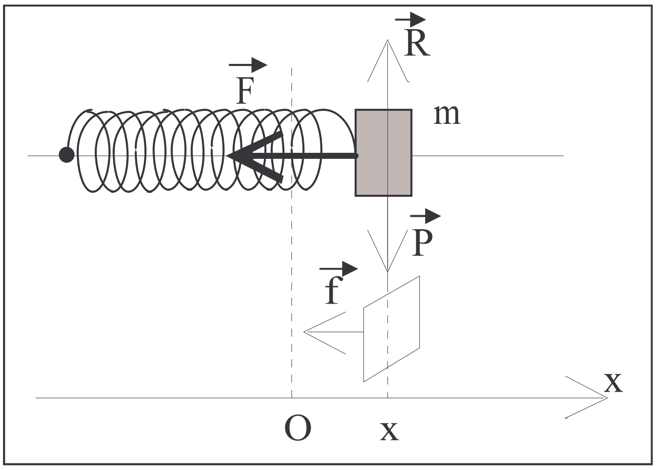
$$E_m = \frac{1}{2}k.a^2(Cos^2\omega_0 t + Sin^2\omega_0.t) + \frac{1}{2}k.(x_0{}^2) - m.g.x0$$

Soit :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}k.a^2 + \frac{1}{2}k.(x_0{}^2) - m.g.x_0}$$

Cette expression montre qu'à chaque instant l'énergie mécanique est constante. Il y a constamment échange entre énergie potentielle et énergie cinétique, ceci en l'absence de frottements.

5.3 Pendule élastique horizontal avec amortissement fluide :



Inventaire des forces appliquées :

Le poids $\vec{P}$ et la réaction de l'axe $\vec{R}$ se compensent :

$$\vec{P} + \vec{R} = 0$$

Il reste la force de rappel $\vec{F}$ due à l'élongation du ressort x, qui est proportionnelle à cette élongation.
Enfin, il y a la force de frottement $\vec{f}$ qui est opposée à la vitesse et proportionnelle à la vitesse. On parle de frottement fluide ou visqueux.
La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe Ox donne :

$$-k.x - k_f \frac{dx}{dt} = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

ou encore :

$$\boxed{m.\frac{d^2x}{dt^2} + k_f \frac{dx}{dt} + k.x = 0}$$

Si on pose :

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{k_f}{m} = 2.\alpha}$$

Cela mène à :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = 0}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est de la forme :

$r^2 + 2.\alpha.r + \omega_0^2 = 0$

Suivant le signe du discriminant de cette équation du second degré, on peut avoir des solutions de formes différentes.

a) $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ ou encore $\alpha < \omega_0$:

Le régime est pseudo périodique ou oscillatoire amorti.

La solution de l'équation caractéristique est :

$$r = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad \text{ou encore :} \qquad \boxed{r = -\alpha \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}} = -\alpha \pm i.\omega}$$

La solution de l'équation différentielle peut alors se mettre sous le forme :

$$\boxed{x = A.e^{-\alpha .t}.Cos\,(\omega.t + \varphi)}$$

A et **φ** sont des constantes que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales.
Ex : pour t = 0 : x = a et dx/dt = 0 .
Alors :
a = A . Cos φ .
et :

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha.A.e^{-\alpha.t}.Cos\,(\omega.t + \varphi) - A.e^{-\alpha.t}\omega.\sin(\,\omega.t + \varphi)$$

$$0 = -\alpha.A.Cos\,\varphi - A.\omega.Sin\,\varphi$$

$$A.\omega.Sin\,\varphi = -\alpha.A.Cos\,\varphi$$

$$Tan\,\varphi = -\frac{\alpha}{\omega}$$

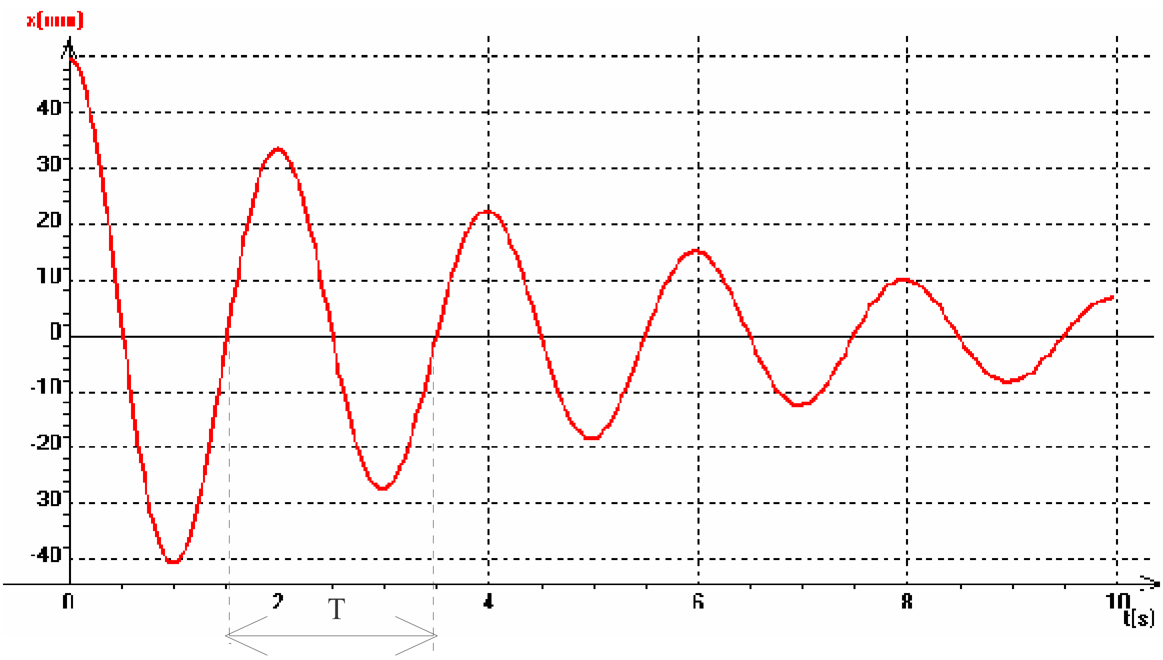
$$\varphi = -Arc\,\tan(\frac{\alpha}{\omega})$$

$$A = \frac{a}{Cos(\varphi)} = \frac{a}{\cos(Arc\tan(\frac{\alpha}{\omega}))}$$

L'amplitude des oscillations diminue de façon exponentielle, de sorte que l'énergie mécanique du système décroît : elle se dissipe en chaleur à cause des frottements.
La pseudo période T est l'intervalle de temps qui sépare deux passages par x = 0 dans le même sens.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0.\left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0{}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > T_0}$$

Dans cette expression T_0 est la période en l'absence de frottements.



b) $\alpha = \omega_0$. C'est le régime critique : Le discriminant est nul.
L'équation caractéristique a une seule racine :
r = $-\alpha = -\omega_0$.
Alors x est de la forme :

$$\boxed{x = (A.t + B).e^{-\omega_0 .t}}$$

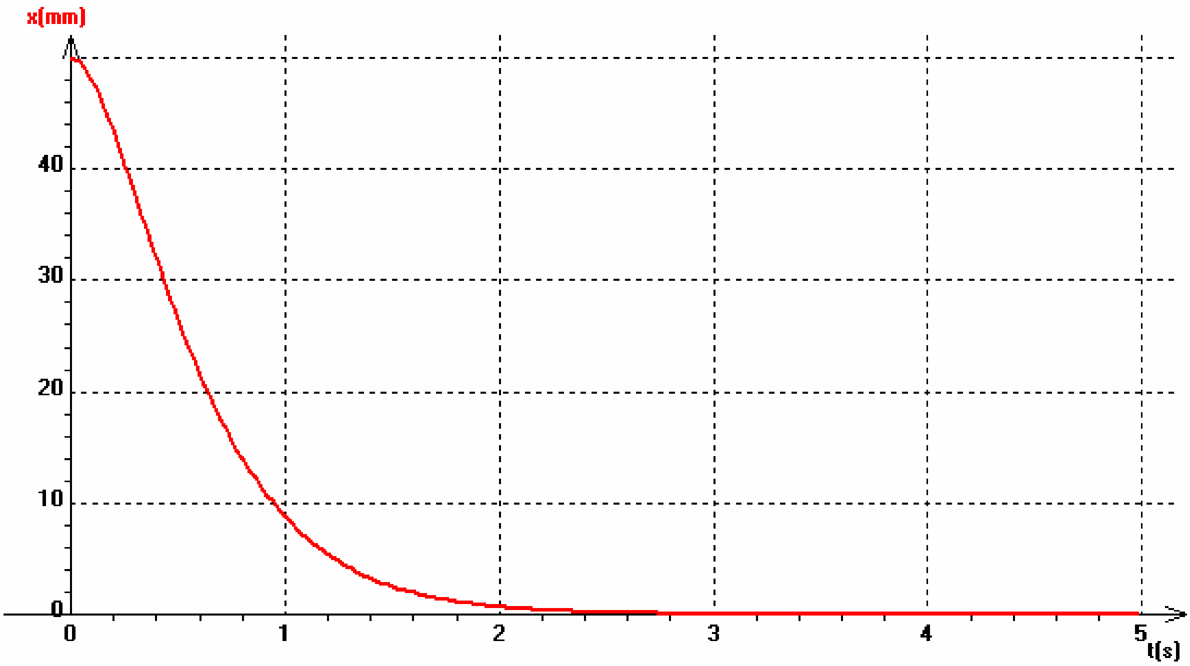
A et B sont des constantes dépendant des conditions initiales.
Ex : Si pour t = 0 , x = a et dx/dt = 0 :
Alors :
a = B . Donc **B = a** .

$$\frac{dx}{dt} = A.e^{-\omega_0 .t} - \omega_0 (A.t + B).e^{-\omega_0 .t}$$

$$0 = A - \omega_0 B$$

$$A = \omega_0 .B = \omega_0 .a$$

Voici l'allure de la courbe x= f (t).



c) si $\alpha > \omega_0$: C'est le régime apériodique :
Cela correspond à un amortissement important.
Les solutions de l'équation caractéristique sont négatives et égales à:

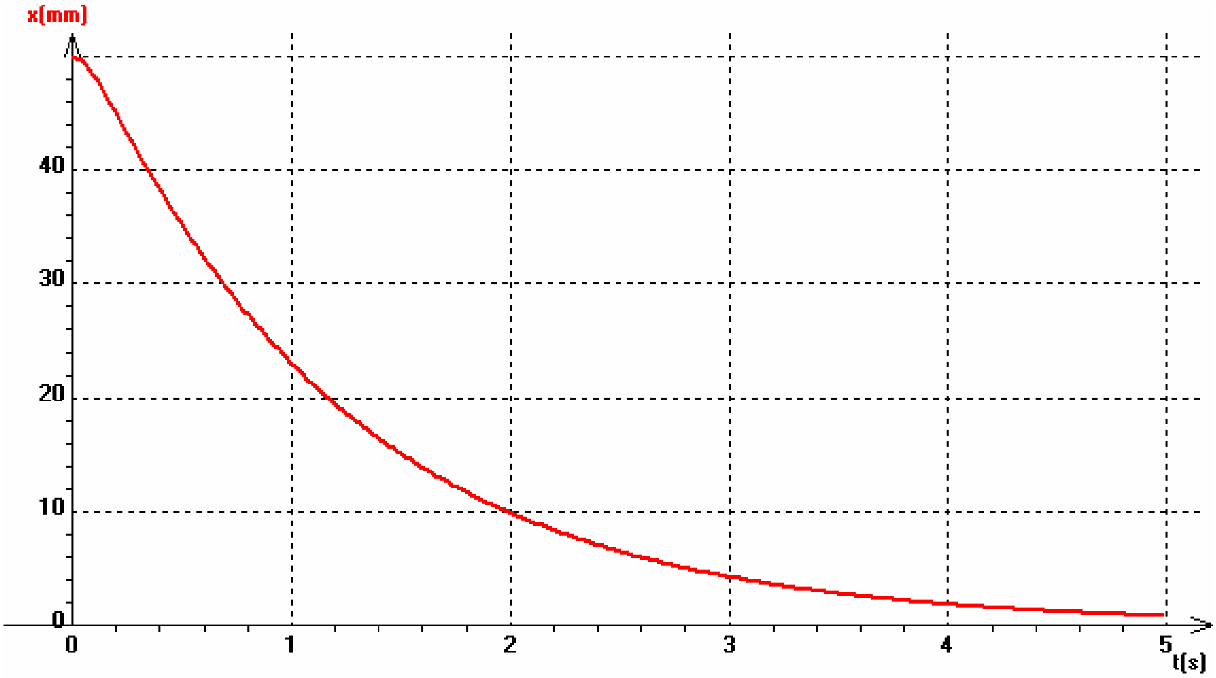
$$r = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Si on appelle ces solutions $-\beta$ et $-\gamma$, l'élongation x est de la forme :

$$x = B.e^{-\beta .t} + C.e^{-\gamma .t}$$

Le mouvement s'amortit moins rapidement que dans le cas du régime critique.

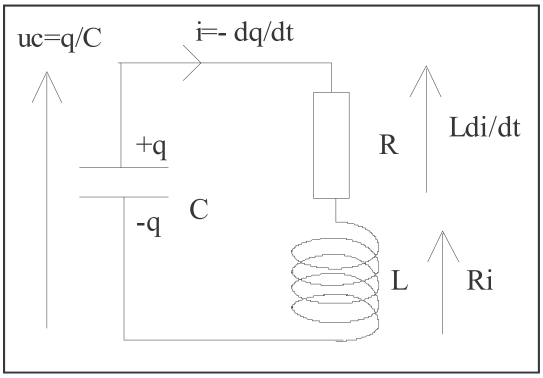
On voit que l'amortissement est plus lent .



5.4 Analogie électromécanique :

L'équation différentielle de l'oscillateur mécanique amorti, est comparable à celle qui régit la décharge d'un condensateur dans un circuit inductif et résistif:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}+k_f.\frac{dx}{dt}+k.x=0$$



$$uc = \frac{q}{C} = R.i + L.\frac{di}{dt}$$

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt} - L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Dans cette équation on voit que l résistance intervient pour amortir les oscillations.
En posant :

$$\frac{R}{L} = 2.\alpha, et, \frac{1}{LC} = \omega_0{}^2$$

On aboutit à une équation comparable à celle de l'oscillateur mécanique amorti (voir p10):

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+2.\alpha.\frac{dq}{dt}+\omega_0{}^2.q=0}$$

6. Oscillations forcées, résonance :

6.1 Position du problème :

On considère le mouvement d'un oscillateur harmonique amorti à une dimension, soumis à une force extérieure fonction sinusoïdale du temps:

$F_{ext} = F.Cos(\omega.t)$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k.x - k_f\frac{dx}{dt} + F.Cos(\omega.t)$$

ou :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_f}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}.Cos(\omega.t)$$

ou en posant :

$$\frac{k_f}{m} = 2.\alpha, et, \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

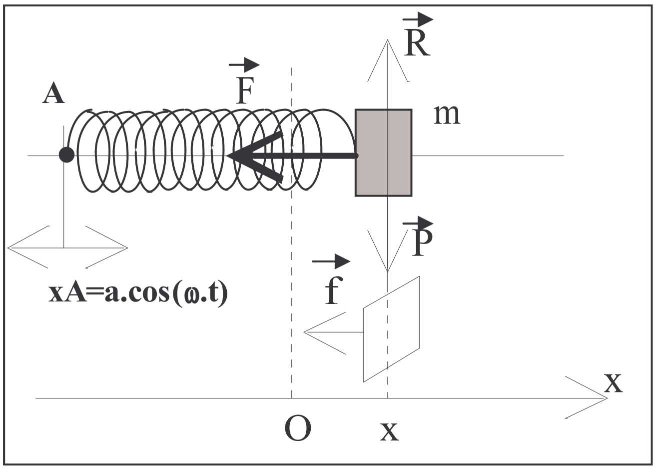
On a :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = \frac{F}{m}.Cos(\omega.t)} \quad (1)$$

On rappelle que le régime critique correspond à :

$\alpha = \alpha_c = \omega_0$.

Réalisation expérimentale :



On impose à l'extrémité A du ressort un mouvement sinusoïdal d'élongation $xA = a.Cos(\omega.t)$.

Si x est le déplacement de la masse m placée à l'autre extrémité du ressort, par rapport à sa position d'équilibre, la modification de la longueur du ressort est (x-xA). La force de rappel $\vec{F}$ qu'il exerce sur la masse a donc pour module :

$-k(x - xA) = -k.x + k.a.Cos(\omega.t)$,

ce qui signifie qu'à la force de rappel s'ajoute la force extérieure :

$\mathbf{F_{ext} = F\ Cos\ (\omega.t)}$, avec $\mathbf{F = k\ .\ a}$

L'équation différentielle (1) ci-dessus a pour solution la somme de deux termes :

- le régime transitoire qui est la solution de l'équation sans second membre , solution qui finit par s'amortir avec le temps.
- la solution particulière de l'équation avec second membre, qui correspond au régime forcé.

x est de la forme $\mathbf{x = A\ .\ Cos\ (\omega.t+\varphi)}$.

Pour déterminer **A** et $\boldsymbol{\varphi}$, On utilise l'expression complexe :

$$\underline{X} = A.e^{j(\omega.t+\varphi)}$$ dont x est la partie réelle.

$$\underline{F_{ext}} = F\,.e^{j\omega.t}$$

Pour obtenir le régime forcé, on remplace x et Fext par leurs expression complexes, et il vient :

$$A.e^{j.(\omega.t+\varphi)}.(-\omega^2+2\alpha.i.\omega+\omega_0{}^2)=\frac{F}{m}e^{j\omega.t}$$

ou encore :

$$A.e^{j.\varphi}.(-\omega^2+2\alpha.i.\omega+\omega_0{}^2)=\frac{F}{m}$$

L'identification des modules et des arguments des deux termes de l'égalité donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\dfrac{F}{m}.\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4.\alpha^2.\omega^2}} \\ et \\ Tan\ \varphi=\dfrac{2.\omega.\alpha}{\omega^2-\omega_0{}^2} \end{array}}$$

6.2 <u>Amplitude des oscillations</u> : Pour évaluer la fréquence ou la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale, on dérive A.

$$\frac{dA}{d\omega}=\frac{F}{m}.(-\frac{1}{2}).\frac{2(\omega_0{}^2-\omega^2).(-2\omega)+8\alpha^2.\omega}{\left[(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4.\alpha^2.\omega^2\right]^{3/2}}$$

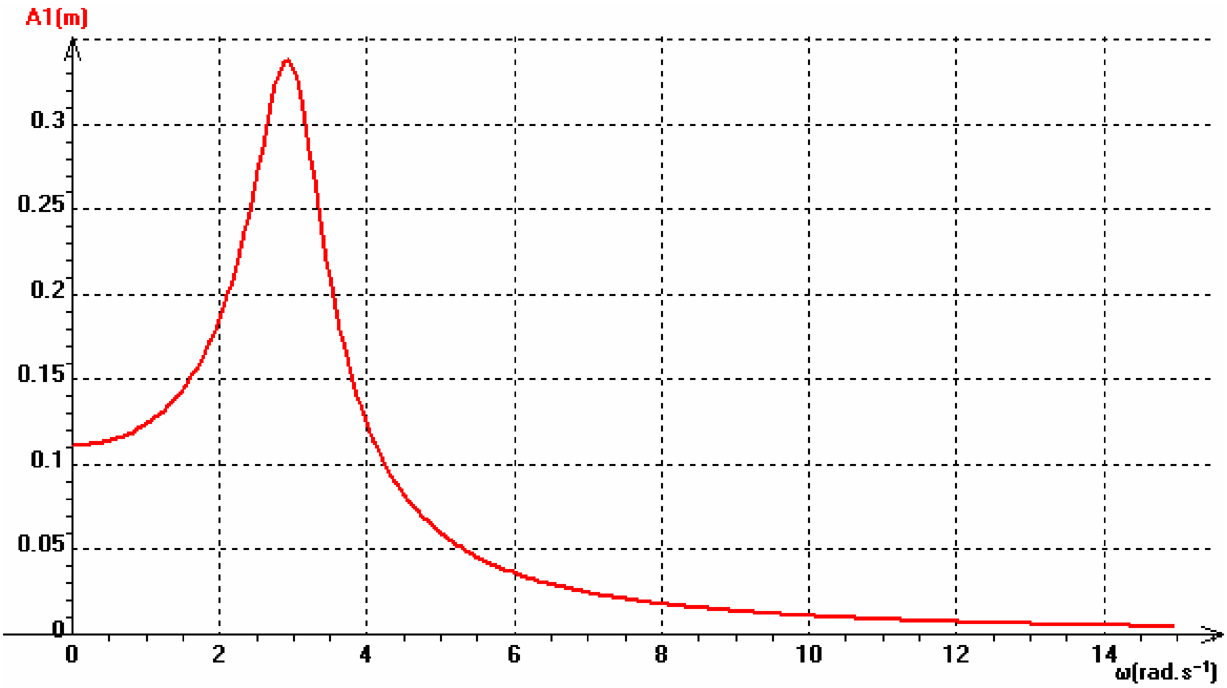
$$\frac{dA}{d\omega}=\frac{F}{m}.\frac{2\omega.(\omega_0{}^2-\omega^2-2\alpha^2)}{\left[(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4.\alpha^2.\omega^2\right]^{3/2}}$$

$\dfrac{dA}{d\,\omega}=0$ pour **ω =0** et $\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-2\alpha^2}$

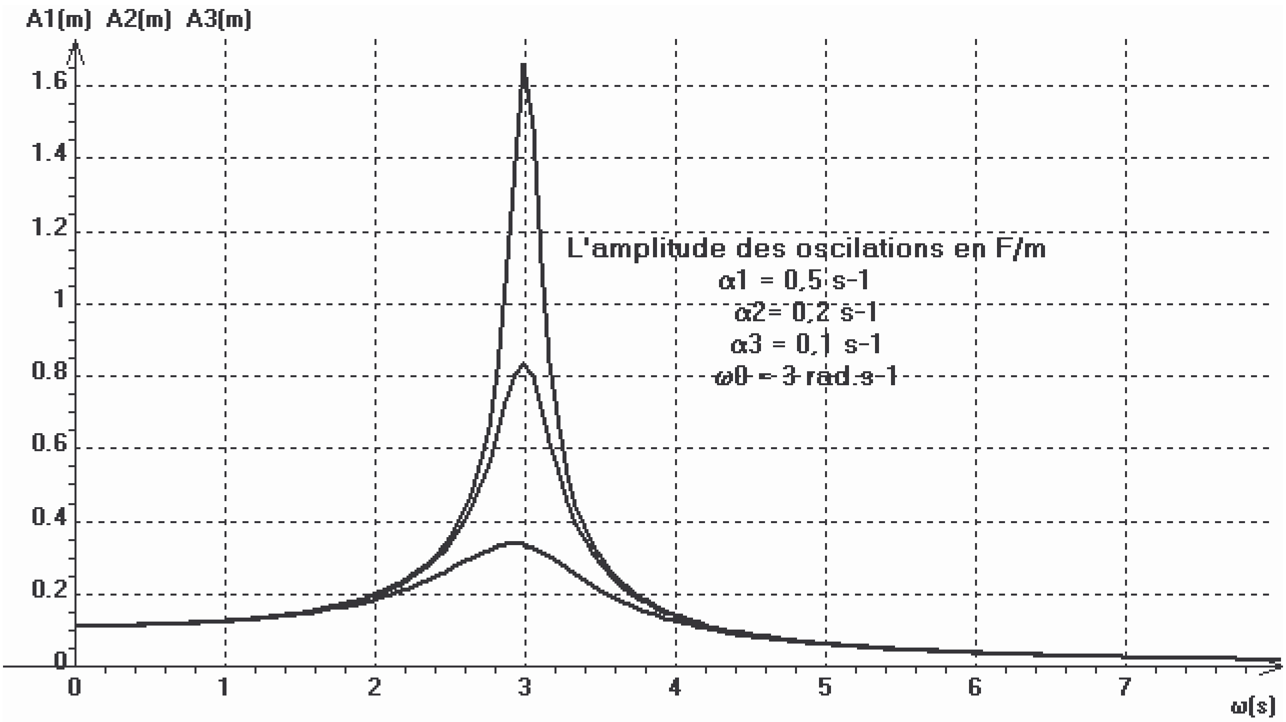
à condition que :

$$\alpha<\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}=0{,}707\,.\alpha_c$$

Si le frottement n'est pas trop important ($\alpha < 0{,}707.\alpha_c$), le phénomène de résonance commence à apparaître.
L'amplitude de A passe par un maximum pour : $\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-2\alpha^2}$



Le graphique ci-dessus représente l'amplitude des oscillations pour **ω0 =3rad/s** et α_1 **=0,5**.
On voit que le maximum se produit au voisinage de **ω = ω0**.
Le graphique ci-dessous montre l'influence du coefficient d'amortissement **α** sur l'amplitude de la résonance.
Plus **α** est faible plus celle-ci est aigue.



<u>La bande passante</u> est définie comme étant la bande de valeurs de ω pour lesquelles l'amplitde des oscillations est comprise entre A max et Amax / racine (2).