Ch 6: Régimes périodiques.

1. Signal périodique; définitions.

Définition d'un signal périodique:

Un signal (courant, tension) est périodique s'il se reproduit, identiquement à lui-même au bout d'une durée T appelée période.

Si u est périodique : u(t) = u(t+T), quel que soit t.

Si i est périodique : i(t) = i(t+T), quel que soit t.

2. Développement en série de Fourier d'un signal périodique : principe ; valeur des différents termes :

Toute fonction périodique, de période T, donc telle que

x(t+T) = x(t), quel que soit t, peut être décomposée en une somme comprenant:

- un terme constant, égal à *la valeur moyenne*,
- un terme sinusoïdal, de fréquence f = 1/T, appelé *le fondamental*,
- une suite de termes sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f , appelés *les harmoniques*.

Cette somme, appelée développement en série de Fourier peut s'écrire ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{X_0 + X_{1m}Sin(\omega t + \theta_1) + X_{2m}Sin(2\omega t + \theta_2) + \ldots} \\ &\mathbf{+ X_{pm}Sin(p\omega t + \theta_p) + \ldots}\end{aligned}}$$

Remarque: ω est la pulsation du fondamental: ω = 2 π f.

p est le rang de l'harmonique, X_{pm} son amplitude, θ_p son déphasage à l'origine.

Pour faciliter les calculs, on écrit souvent:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{x = X_0 + A_1 Sin\omega t + B_1 Cos\omega t + A_2 Sin2\omega t + B_2 Cos2\omega t + \ldots + A_p Sinp\omega t + B_p Cosp\omega t + \ldots} \\ &\mathbf{avec,\ X_{pm} = \sqrt{A_p{}^2 + B_p{}^2}} \\ &\mathbf{et,\ tg\theta_p = \frac{B_p}{A_p}}\end{aligned}}$$

On calcule le terme constant et les amplitudes des termes sinusoïdaux par les formules:

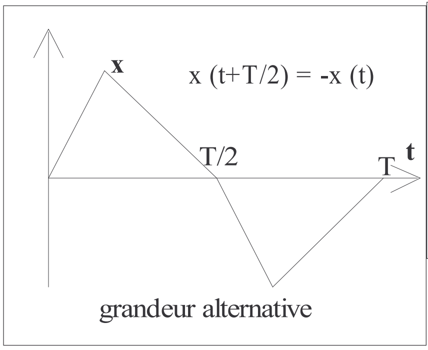
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{X_0} &= \mathbf{\frac{1}{T}\int_0^T x dt,} \\ \mathbf{A_p} &= \mathbf{\frac{2}{T}\int_0^T x.Sinp\omega t.dt,} \\ \mathbf{B_p} &= \mathbf{\frac{2}{T}\int_0^T x.Cosp\omega t.dt}\end{aligned}}$$

Remarque 1 : Le calcul de ces coefficients ne fait pas partie du programme de physique appliquée du B.T.S. CIM .

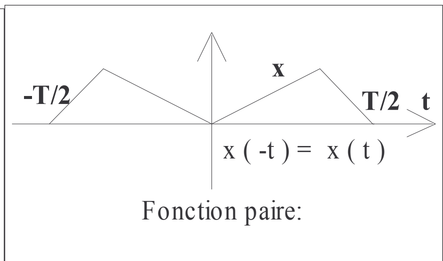
Remarque 2 : Certaines symétries permettent de simplifier le développement:

- pour une grandeur *alternative,* X_0 est nulle.
- pour une grandeur *paire*, A_p est nulle.
- pour une grandeur *impaire*, B_p est nulle.

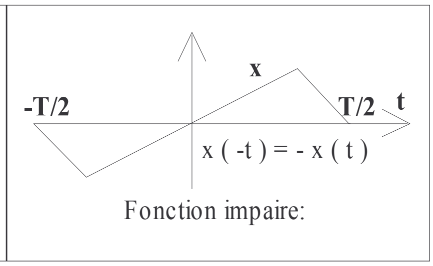
(voir ci-dessous).



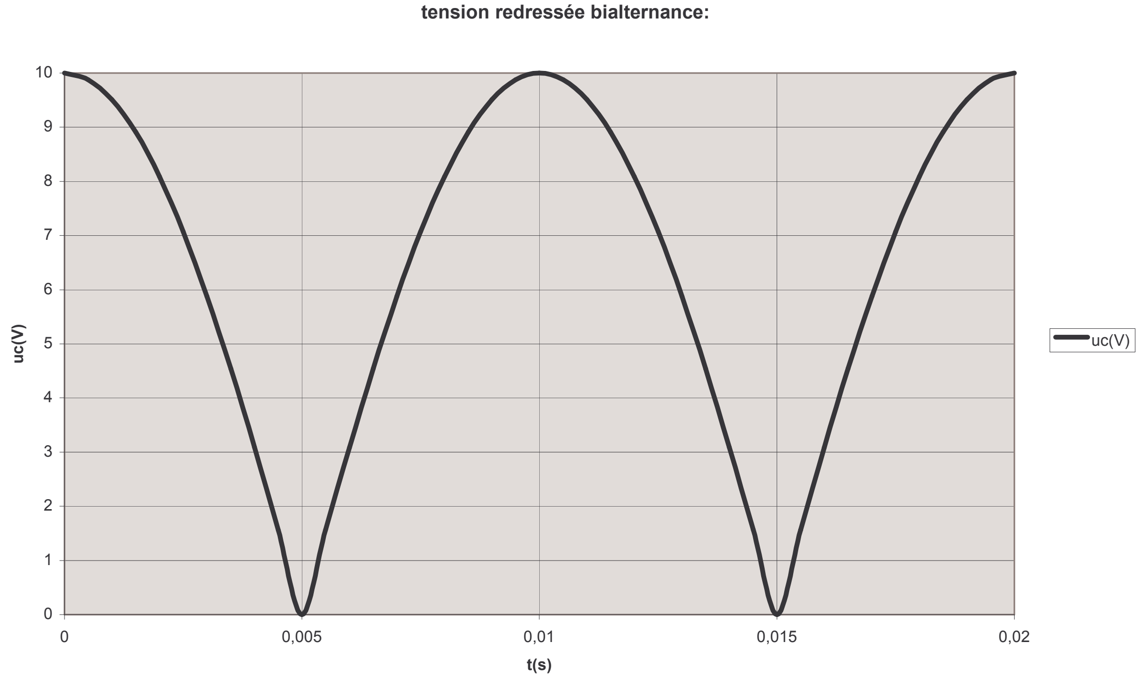
grandeur alternative



Fonction paire:



Fonction impaire:



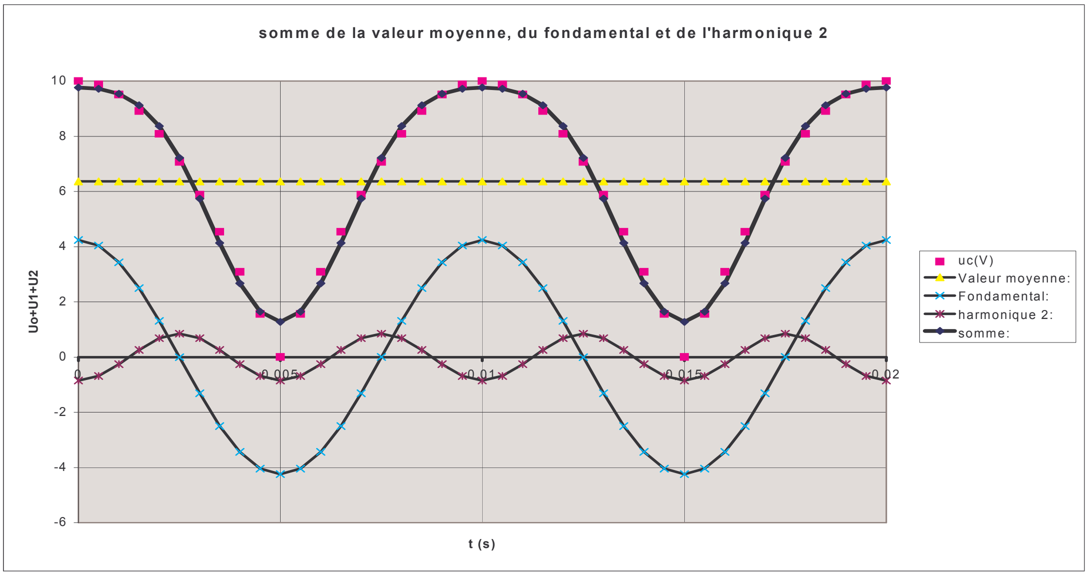
L'équation de la tension redressée ci-dessus est donnée ci-contre.
La fréquence du réseau étant de 50 Hz, la fréquence de la tension redressée est de 100 Hz. $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du réseau .

$$\mathbf{u_c = \left|\hat{U}.Cos\omega t\right|}$$

Le calcul donne pour les premiers termes du développement:
$uc = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
U_0 est la valeur moyenne, u_1 le premier harmonique ou fondamental, u_2 l'harmonique de rang 2 etc...

$$\mathbf{u_c = \frac{2}{\pi}\hat{U} + \frac{4\hat{U}}{3\pi}Cos2\omega t - \frac{4\hat{U}}{15\pi}Cos4\omega t + \frac{4\hat{U}}{35\pi}Cos6\omega t - \frac{4\hat{U}}{63\pi}Cos8\omega t....}$$

La figure suivante (**ci-dessous**) donne la somme des trois premiers termes du développement (valeur moyenne + fondamental + harmonique de rang 2).



3. Relation entre valeur efficace et développement en série :

La valeur efficace d'une grandeur est la racine carrée de la somme des carrés du terme constant et des valeurs efficaces des divers termes sinusoïdaux du développement en série.

$$\mathbf{X_f = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt} = \sqrt{X_0{}^2 + X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 + \ldots + X_p{}^2 + \ldots}}$$

$$\mathbf{avec, X_p = \frac{X_{pm}}{\sqrt{2}}}$$

Remarque: Une tension redressée (ou un courant redressé) peut être considérée comme étant la somme de sa valeur moyenne et d'une composante alternative dont la valeur moyenne est nulle.

$u = U_0 + u_a$ ou $I = I_o + i_a$.

Compte-tenu de ce qui précède, on définit la valeur efficace de la composante alternative, Ua ou Ia et on a les relations:

$$\mathbf{U_f = \sqrt{U_0{}^2 + U_a{}^2}, avec, U_a = \sqrt{U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2 + \ldots},}$$

$$\mathbf{I_f = \sqrt{I_0{}^2 + I_a{}^2}, avec, I_a = \sqrt{I_1{}^2 + I_2{}^2 + I_3{}^2 + \ldots}}$$

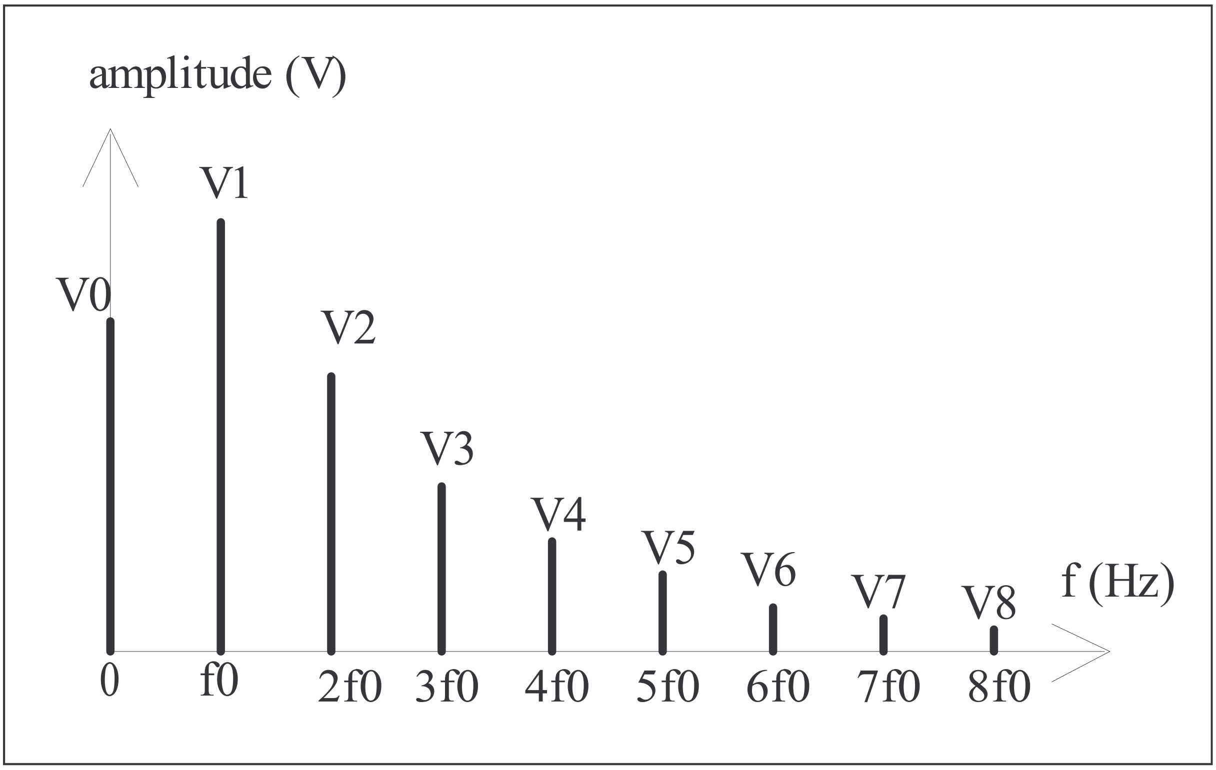
Remarque: Certains appareils de mesure de type **R.M.S.** permettent de mesurer U_f ou U_a , I_f ou I_a .

4. Spectre en amplitude :

Pour un signal v (t) périodique, de période $T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ décomposable en série de Fourier tel que :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} V_n.Cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

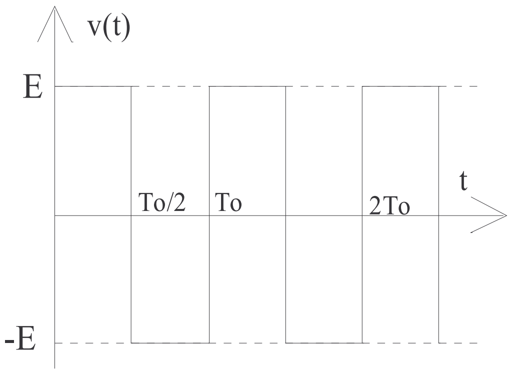
On appelle spectre en amplitude du signal le graphique ci-dessous :



5. Tableau des développements en série de Fourier des principaux signaux :

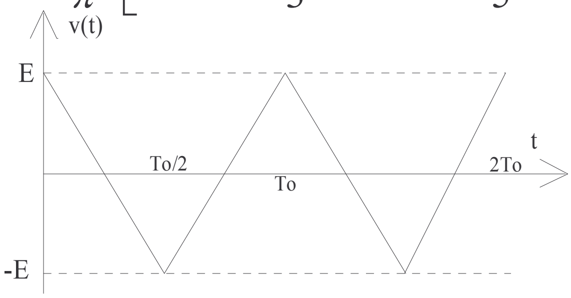
5.1 Signal rectangulaire d'amplitude E **:**Le développement en série de Fourier s'écrit :

$$v = \frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7}\sin 7\omega_0 t + ..\right]$$



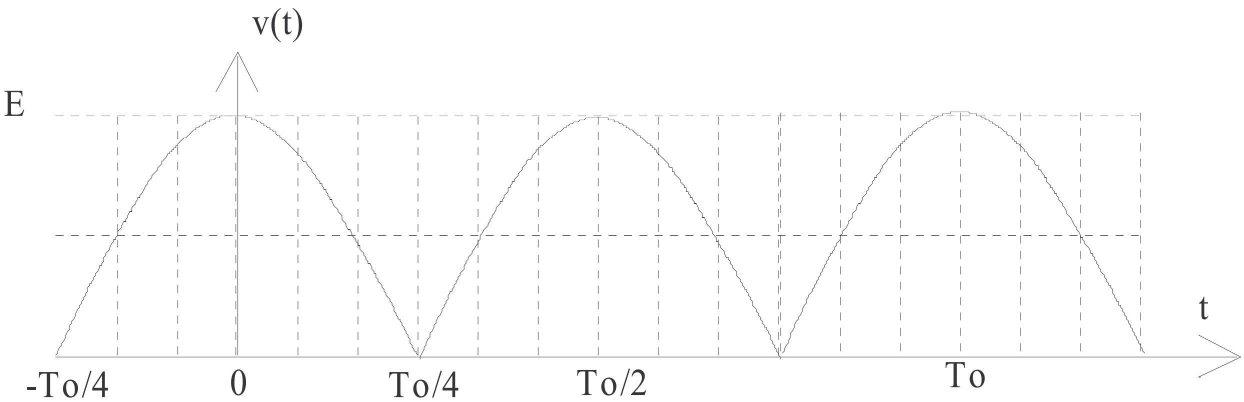
5.2 Signal triangulaire d'amplitude E : Le développement en série de Fourier s'écrit :

$$v = \frac{8E}{\pi^2}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7^2}\cos 7\omega_0 t + ..\right]$$



5.3 Signal résultant du redressement bialternance d'un signal sinusoïdal de période T_0 :

$$v = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2\omega_0 t - \frac{1}{15}\cos 4\omega_0 t + \frac{1}{35}\cos 6\omega_0 t - \frac{1}{63}\cos 8\omega_0 t + ..\right]$$



6. <u>Exercices</u> :

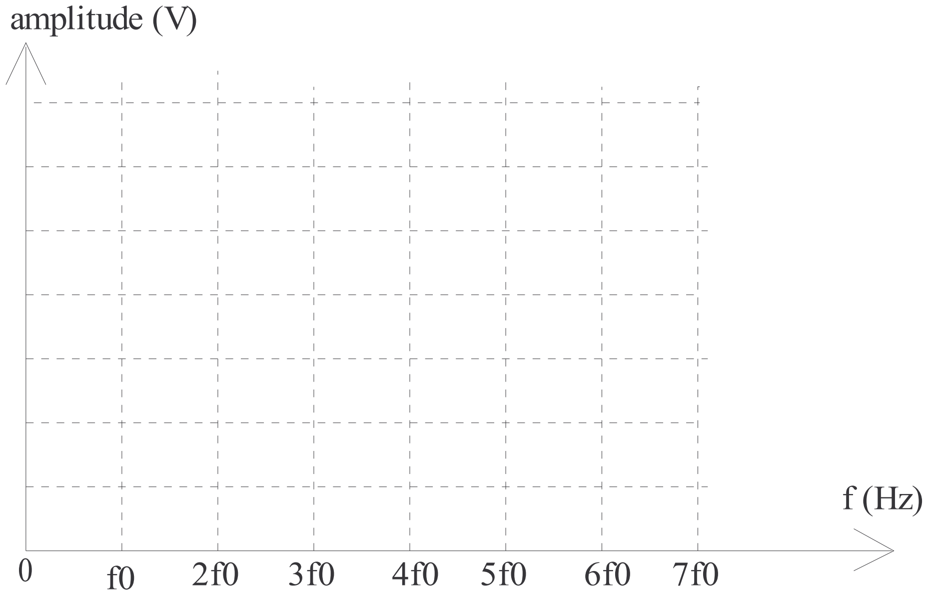
Dans tous les exercices qui suivent, on prend E = 10V , f_0 = 50Hz .

Ex 1 : Etablir et représenter le spectre en amplitude d'un **signal rectangulaire** d'amplitude E et de fréquence f_0 . (**voir paragraphe 5.1**)

a) Remplir le tableau suivant :

	Valeur moyenne	**Fonda-mental**	**Harmoni-que 2**	**Harmoni-que 3**	**Harmoni-que 4**	**Harmoni-que 5**	**Harmoni-que 6**	**Harmoni-que 7**
Fré-quence (Hz)								
Ampli-tude (V)								

b) Représenter le spectre en amplitude du signal.

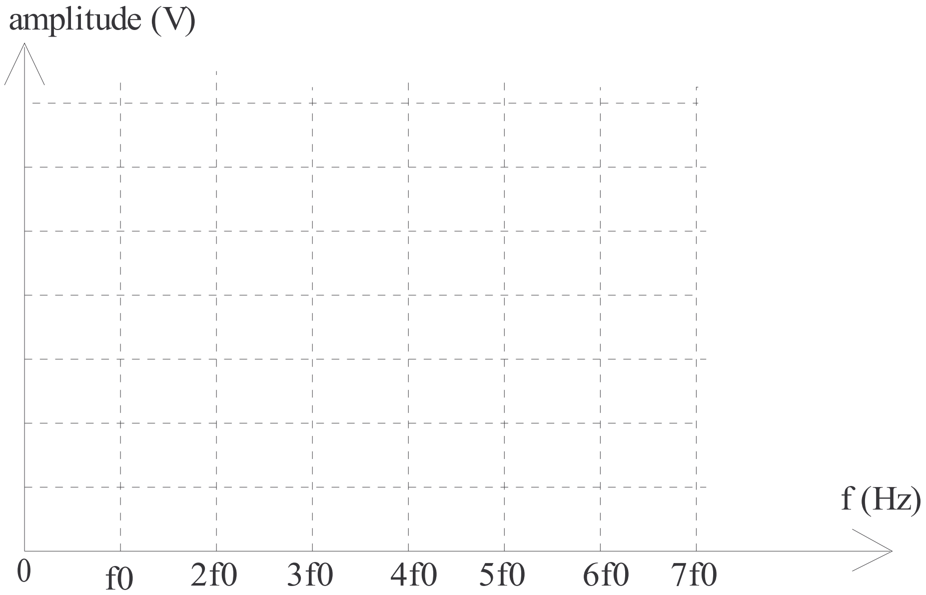


Ex 2 : Etablir et représenter le spectre en amplitude d'un **signal triangulaire** d'amplitude E et de fréquence f_0 . (**voir paragraphe 5.2**)

a) Remplir le tableau suivant :

	Valeur moyenne	**Fonda-mental**	**Harmoni-que 2**	**Harmoni-que 3**	**Harmoni-que 4**	**Harmoni-que 5**	**Harmoni-que 6**	**Harmoni-que 7**
Fré-quence (Hz)								
Ampli-tude (V)								

b) Représenter le spectre en amplitude du signal.



Ex 3 : Etablir et représenter le spectre en amplitude d'un **signal résultant du redressement bialternance d'un signal sinusoïdal, de période To et d'amplitude E** (**voir paragraphe 5.3**)

a) Remplir le tableau suivant :

	Valeur moyenne	**Fonda-mental**	**Harmoni-que 2**	**Harmoni-que 3**	**Harmoni-que 4**	**Harmoni-que 5**	**Harmoni-que 6**	**Harmoni-que 7**
Fré-quence (Hz)								
Ampli-tude (V)								

b) Représenter le spectre en amplitude du signal.