

BTS CIM 1° année: Cours de Physique appliquée :

CH 2 : Circuits en régimes variables:

1. Régimes transitoire et permanent :

Règles générales:

Quand on modifie un circuit (application d'une tension, ouverture, fermeture, changement d'état d'un composant redresseur ou interrupteur électronique), la variable x , intensité ou tension, est donnée par la solution d'une équation différentielle où la perturbation est portée au second membre.

Cette solution est la somme de deux termes:

- la *solution générale* de l'équation "homogène", *sans second membre ou avec second membre nul*. Cette solution donne le *régime libre* x_l du circuit; x_l est toujours, en pratique une fonction décroissante du temps à cause de l'amortissement dû aux résistances).

- et la *solution particulière de l'équation avec second membre*,

(cette solution donne le *régime forcé* x_f du circuit, c'est à dire celui que la perturbation tend à imposer au circuit; si le régime permanent avait le temps de s'établir, cette solution subsisterait seule).

La solution fait intervenir des constantes d'intégration dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation différentielle.

Leur valeur est déterminée par les *conditions au limites*.

Le régime libre x_l constitue le régime *transitoire*. Le régime forcé x_f qui subsiste lorsque x_l a disparu constitue le régime *permanent*.

2. Régimes périodiques :

2.1 Définition d'un signal périodique:

Un signal (courant, tension) est périodique s'il se reproduit, identiquement à lui-même au bout d'une durée T appelée période.

Si u est périodique : $u(t) = u(t+T)$, quel que soit t .

Si i est périodique : $i(t) = i(t+T)$, quel que soit t .

$$u_c = |\hat{U} \cdot \text{Sin}\omega t|$$

2.2 Valeur moyenne:

La *valeur moyenne* d'une grandeur périodique est définie par:

$$U_m = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot dt$$

pour une tension périodique.

ou par :

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt$$

pour un courant périodique.

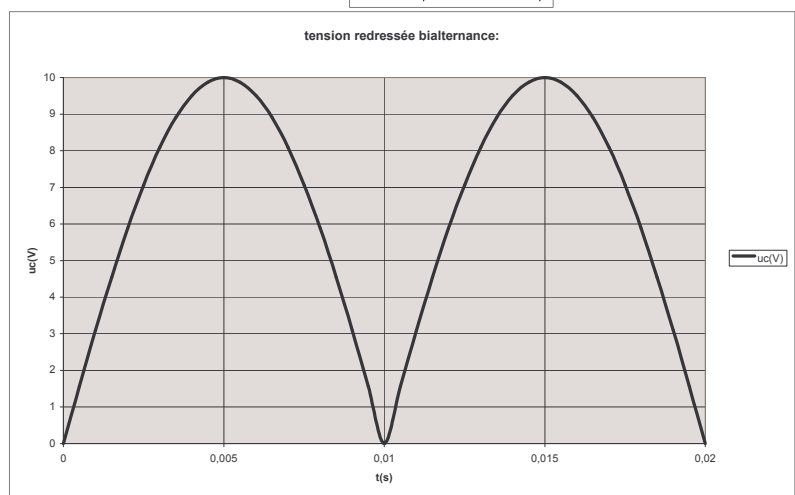
Exemple : Calculer la valeur

moyenne d'une tension redressée bi-alternance ayant la forme ci-dessus:

On remarque que la tension maximale est ici de 10 volts.

En réalité, le calcul est plus simple en effectuant un changement de variable: on pose $\theta = \omega t$.

La période de cette tension est alors π .



$$U_{cm} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \hat{U} \cdot \sin\theta d\theta = \frac{\hat{U}}{\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{\hat{U}}{\pi} (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{2}{\pi} \hat{U}$$

Le calcul se fait assez facilement:

On peut faire le calcul numérique avec $\hat{U}=10$ volts:

$U_{cm}=(2/\pi)*10=6,37$ volts.

2.3 Valeur efficace:

La valeur efficace d'une grandeur périodique est donnée par:

$$I_f = \sqrt{(i^2)_{moy}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

La *valeur efficace* d'une grandeur apparaît donc comme étant *la racine carrée de la valeur moyenne du carré* de la grandeur.

(en anglais: Root Mean Square: **R.M.S.**)

Dans l'exemple qui nous intéresse le calcul s'effectue ainsi:

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\hat{U} \cdot \sin\theta)^2 d\theta = \frac{\hat{U}^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$U_{ef}^2 = \frac{\hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\pi - 0}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \frac{\sin 0}{4} \right] = \frac{\hat{U}^2}{2}$$

Soit, $U_{ef} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

A.N.: l'application numérique donne:

$U_{ef}=10/1,414=7,07$ volts.

3. Grandeurs électriques sinusoïdales :

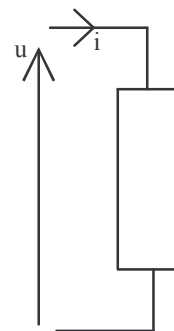
3.1 Rappels :

Soit un dipôle soumis à une tension u et parcouru par une intensité i .

Ces grandeurs sont sinusoïdales, si elles sont de la forme :

$$u = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_u) \quad \text{et} \quad i = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_i)$$

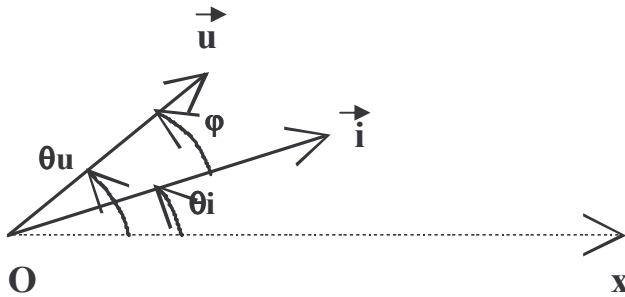
Les principales notations sont rappelées dans le tableau ci-dessous :



u	tension instantanée (V)	i	intensité instantanée (A)
$U\sqrt{2} = \hat{U}$	tension maximale (V)	$I\sqrt{2} = \hat{I}$	intensité maximale (A)
$\omega t + \theta_u$	phase de u (rad)	$\omega t + \theta_i$	phase de i (rad)
t	temps (s)	$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$	pulsation (rad/s)
θ_u	phase à l'origine de u (rad)	θ_i	phase à l'origine de i (rad)
f	fréquence (Hz)	$T=1/f$	période (s)

On représente u et i par les vecteurs de Fresnel :

Ce sont des vecteurs de module respectivement U et I (valeurs efficaces de u et i), et faisant un angle égal à respectivement θ_u et θ_i avec un axe Ox choisi comme origine des phases.



L'angle φ entre \vec{i} et \vec{u} est appelé déphasage de l'intensité sur la tension .

On voit que :

$$\varphi = \theta_u - \theta_i$$

O

Si $\varphi > 0$, i est en retard sur u . C'est le cas pour les circuits inductifs.

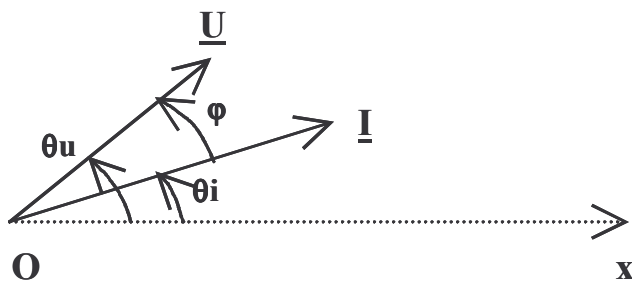
Si $\varphi = 0$, i et u sont en phase. C'est le cas des circuits résistifs.

Si $\varphi < 0$, i est en avance sur u . C'est le cas des circuits capacitifs.

3.2 Nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale :

A toute grandeur sinusoïdale, tension ou intensité, on peut associer un nombre complexe:

Grandeur instantanée :	Nombre complexe associé :	
	forme polaire	forme algébrique
tension : $u = U\sqrt{2}\text{Sin}(\omega t + \theta_u)$	$\underline{U} = [U; \theta_u]$	$\underline{U} = U\text{Cos}\theta_u + jU\text{Sin}\theta_u$
intensité : $i = I\sqrt{2}\text{Sin}(\omega t + \theta_i)$	$\underline{I} = [I; \theta_i]$	$\underline{I} = I\text{Cos}\theta_i + jI\text{Sin}\theta_i$

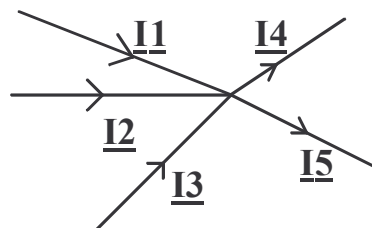
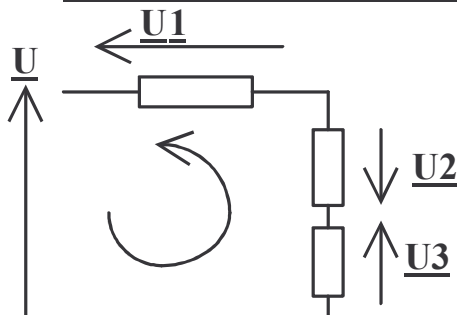


Ex : $u = 220\sqrt{2}\text{Sin}(\omega t + \pi/3)$

$i = 4\sqrt{2}\text{Sin}(\omega t + \pi/6)$

Calculer les expressions de \underline{U} et \underline{I} ,sous les deux formes.

3.3. Loi des mailles (ou loi des branches) et loi des nœuds en complexe :



En régime sinusoïdal, les lois relatives aux tensions et aux intensités s'écrivent :

- **Loi des mailles :** $\underline{U}_3 - \underline{U}_2 + \underline{U}_1 - \underline{U} = 0$
- (Ou loi des branches) : $\underline{U} = \underline{U}_3 - \underline{U}_2 + \underline{U}_1$
- **Loi des nœuds :** $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5$

3.4 Impédance complexe d'un dipôle passif linéaire :

L'impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle passif et linéaire soumis à une tension \underline{U} parcouru par une intensité \underline{I} est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{[U; \theta_u]}{[I; \theta_i]} = \left[\frac{U}{I}; \theta_u - \theta_i \right] = [Z; \varphi] \quad (\text{forme polaire})$$

$$Z = \frac{U}{I} \text{ est l'impédance du dipôle (en ohms } (\Omega) \text{).}$$

$\varphi = \theta_u - \theta_i$ est le déphasage du courant sur la tension (en radians (rad)).

Forme algébrique : l'impédance Z peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$

$R = Z \cos \varphi$ est la résistance du dipôle (en ohms (Ω))

$X = Z \sin \varphi$ est la réactance du dipôle (en ohms (Ω)).

Exercice :

Supposons que le dipôle étudié soit soumis à la tension \underline{U} et parcouru par l'intensité \underline{I} de l'exercice précédent.

Calculer \underline{Z} sous les deux formes.

3.5 Admittance complexe :

L'admittance complexe \underline{Y} d'un dipôle est l'inverse de son impédance complexe \underline{Z} :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{[I; \theta_i]}{[U; \theta_u]} = \left[\frac{I}{U}; \theta_i - \theta_u \right] = [Y; -\varphi] \quad (\text{forme polaire})$$

$Y = 1/Z = I/U$ est l'admittance du dipôle (en siemens (S)).

La forme algébrique s'écrit :

$$\underline{Y} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G + jB$$

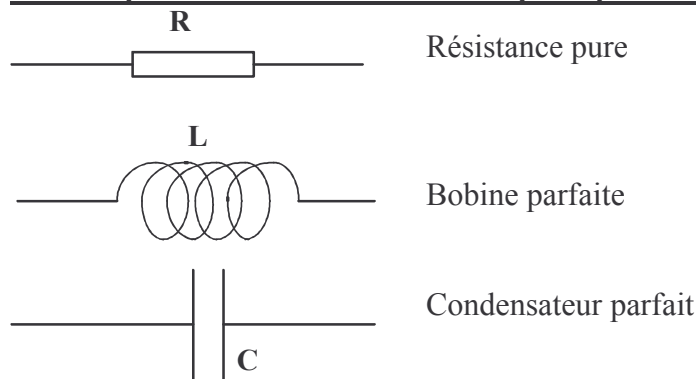
$G = Y \cos \varphi$ est la conductance du dipôle (en siemens (S)).

$B = -Y \sin \varphi$ est la susceptance du dipôle (en siemens (S)).

Exercice :

Calculer sous les deux formes l'admittance \underline{Y} du dipôle précédent.

3.6 Impédance et admittance des dipôles passifs et linéaires élémentaires :



Les impédances et admittances de ces dipôles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

	Z (ohms)	φ (rad)	<u>Z</u>	R (ohms)	X (ohms)	Y (S)	<u>Y</u>	G (S)	B (S)
R	R	0	R	R	0	1/R	1/R	1/R	0
L	$L\omega$	$\pi/2$	$jL\omega$	0	$L\omega$	$1/L\omega$	$\frac{1}{jL\omega} = \frac{-j}{L\omega}$	0	$-1/L\omega$
C	$1/C\omega$	$-\pi/2$	$\frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}$	0	$-1/C\omega$	$C\omega$	$jC\omega$	0	$C\omega$

4. Dipôles associés :

4.1 En série :

Règle : L'impédance complexe équivalente Z de plusieurs dipôles associés en série est égale à la somme de leurs impédances complexes :

$$\underline{Z} = \underline{Z1} + \underline{Z2} + \underline{Z3}$$

Exemple : bobine équivalente à une résistance de 32 Ω en série avec une inductance de 0,1H .

Calculer Z .

4.2 En parallèle :

Règle : L'admittance complexe équivalente Y de plusieurs dipôles associés en parallèle est égale à la somme de leurs admittances complexes :

$$\underline{Y} = \underline{Y1} + \underline{Y2} + \underline{Y3}$$

Cas particulier de deux dipôles associés en parallèle :

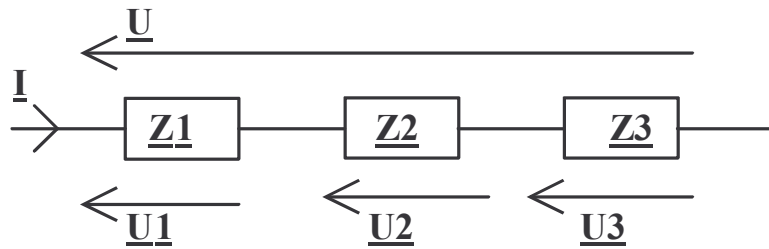
Pour de tels dipôles, on peut écrire :

$$\underline{Y} = \underline{Y1} + \underline{Y2}, \text{ ou } \boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z1}} + \frac{1}{\underline{Z2}} = \frac{\underline{Z1} + \underline{Z2}}{\underline{Z1}\underline{Z2}}}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{Z1}\underline{Z2}}{\underline{Z1} + \underline{Z2}}}$$

4.3 Division de tension :

Lorsque plusieurs dipôles associés en série sont parcourus par le même courant, ils effectuent une division de la tension totale.



Dans ce cas, on a :

$$\underline{U1} = \frac{\underline{Z1}}{\underline{Z1} + \underline{Z2} + \underline{Z3}} \underline{U}$$

Des formules analogues permettent de calculer $\underline{U2}$ et $\underline{U3}$.

5. Fonction de transfert d'un quadripôle :

Un quadripôle est un circuit comportant deux entrées ,E et E' entre lesquelles existe une tension d'entrée \underline{Ue} et deux sorties S et S', entre lesquelles existe une tension de sortie \underline{Us} .

La fonction de transfert du quadripôle est définie par la relation :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}}$$

Exemple : quadripôle RC :

6. Puissance en régime sinusoïdal :

Soit un dipôle alimenté en régime sinusoïdal. Il es soumis à une tension u et parcouru par un courant d'intensité i .

$$u = U\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t)$$

$$i = I\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t - \varphi)$$

La puissance instantanée absorbée par le dipôle est égale à
 $p = u.i$, soit :

$$p = u.i = U\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t).I\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t - \varphi)$$

Compte tenu de la formule trigonométrique :

$$\text{Sin}(a).\text{Sin}(b) = \frac{1}{2}(\text{Cos}(a - b) - \text{Cos}(a + b))$$

Cela donne :

$$p = \frac{1}{2}(2UI).(\text{Cos} \varphi - \text{Cos}(2\omega t - \varphi))$$

$$\text{ou } p = UI.\text{Cos} \varphi - UI.\text{Cos}(2\omega t - \varphi)$$

La puissance instantanée p est donc la somme d'un terme constant $UI.\text{Cos}\varphi$ et d'un terme sinusoïdal de pulsation 2ω .

Sur une période de u et i , la valeur moyenne de p est égale à

$$\mathbf{P = UI.Cos\varphi} \text{ .(U en volts (V), I en ampères (A), P en watts (W))}$$

Cette puissance est la **puissance active** consommée par le dipôle.

Cette puissance est maximale si $\varphi = 0$. Elle est nulle si $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = -\pi/2$.

On définit la **puissance réactive** par la formule :

$$\mathbf{Q = UI.Sin\varphi}$$
 (U en volts (V), I en ampères (A), Q en volts.ampères réactifs (var)).

Q traduit l'importance des échanges d'énergie à bilan nul entre le générateur et le récepteur.

En effet Q est maximale en valeur absolue pour $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = -\pi/2$.

La **puissance apparente** est définie par :

$$\mathbf{S = UI}$$
 (U en volts (V), I en ampères (A), S en volts.ampères (V.A))

La **puissance complexe** est définie par :

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{U}}.\underline{\mathbf{I}}^* \text{ . (} \underline{\mathbf{I}}^* \text{ est le complexe conjugué de } \underline{\mathbf{I}} \text{.)}$$

Soit :

$$\underline{\mathbf{S}} = [\underline{\mathbf{U}};0].[\underline{\mathbf{I}};+\varphi] = [\underline{\mathbf{U}}.\underline{\mathbf{I}};+\varphi] = [\underline{\mathbf{S}}; \varphi] = U.I\text{Cos}\varphi + j.U.I\text{Sin}\varphi = P + jQ$$

Relations :

$$\boxed{\text{Cos}\varphi = \frac{P}{S}} \text{ ou } \boxed{P = S.\text{Cos}\varphi}$$

De même :

$$\boxed{\text{Sin}\varphi = \frac{Q}{S}} \text{ ou } \boxed{Q = S.\text{Sin}\varphi}$$

On a aussi :

$$\boxed{\text{Tan}\varphi = \frac{Q}{P}} \quad \text{ou} \quad \boxed{Q = P.\text{Tan}\varphi}$$

Enfin :

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Dans le cas où l'impédance du dipôle s'écrit sous la forme $\underline{Z} = R + jX$, cela donne :

$$\underline{S} = \underline{U}.\underline{I}^* = \underline{Z}.\underline{I}.\underline{I}^* = \underline{Z}.I^2 = (R + jX).I^2 = R.I^2 + j.X.I^2 = P + j.Q$$

Par identification, il vient :

$$P = R.I^2, \quad Q = X.I^2.$$

$$\text{et } S = Z.I^2.$$

7. Dérivation en complexe :

Règle :

Dériver un nombre complexe, représentatif d'une grandeur électrique (courant ou tension) revient à la multiplier par $j\omega$. En effet :

Si on part d'une tension de la forme :

$$u = U\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t),$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{du}{dt} = U.\sqrt{2}.\omega.\text{Cos}(\omega t) = \omega.U.\sqrt{2}.\text{Sin}(\omega t + \pi/2)$$

Le nombre complexe associé est donc :

$$\frac{d\underline{U}}{dt} = \left[\omega\underline{U}; + \frac{\pi}{2} \right] = j\omega.U = j\omega.\underline{U}$$

C'est bien la règle indiquée.